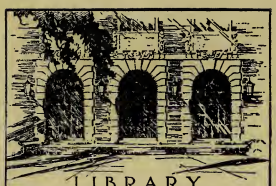


LIBRARY
OF THE
UNIVERSITY
OF ILLINOIS

531
Ap42
v.4'

[redacted]

TRAITÉ

DE

MÉCANIQUE RATIONNELLE

OUVRAGES DE M. Paul APPELL.

Éléments d'Analyse mathématique *à l'usage des Candidats au certificat de mathématiques générales, des Ingénieurs et des Physiciens.* Cours professé à l'Ecole centrale des Arts et Manufactures. 4e édition entièrement refondue..... **80** fr.

Traité de Mécanique rationnelle (Cours de Mécanique de la Faculté des Sciences). 5 volumes in-8 (25-16), se vendant séparément :

Tome I. — *Statique. Dynamique du point.* 5e édit. entière refondue. **100** fr.

Tome II. — *Dynamique des systèmes. Mécanique analytique* 4e édit. **100** fr.

Tome III. — *Equilibre et mouvement des milieux continus.* 2e édit. entièrement refondue, avec une Note de E. et F. Cosserat, *Sur l'action euclidienne*..... **100** fr.

Tome IV. — *Figures d'équilibre d'une masse liquide homogène en rotation.* 2e édit. revue et aug. avec le concours d'Alex. Véronnet, astronome à l'Observatoire de Strasbourg..... **60** fr.

Tome V. — *Eléments de calcul tensoriel. Applications géométriques et mécaniques*, avec la collaboration de René Thiry, Professeur à la Faculté des Sciences de Strasbourg..... **60** fr.

Cours de Mécanique de la classe de Mathématiques spéciales, conforme au programme du 27 juillet 1904, à l'usage des candidats aux Ecoles Normale, Polytechnique, Centrale, Navale (4e édition entièrement refondue). **50** fr.

Les mouvements de roulement en dynamique, avec deux Notes de J. Hadamard. (*C. S.*)..... **10** fr.

Sur une forme générale des équations de la dynamique. (Fasc. I du *Mémorial des Sciences mathématiques.*)..... **15** fr.

Séries hypergéométriques de plusieurs variables. Polynomes d'Hermite et autres fonctions de l'hyperespace. (Fasc. III du *Mémorial des Sciences mathématiques.*)..... **15** fr.

OUVRAGE DE MM. APPELL ET GOURSAT.

Théorie des fonctions algébriques et de leurs intégrales. 2e édition revue et augmentée par Pierre Fatou, astronome à l'Observatoire de Paris :

Tome I. — *Études des fonctions analytiques sur une surface de Riemann.*

Tome II. — *Théorie des fonctions algébriques d'une variable et des transcendantes qui s'y rattachent. Fonctions automorphes.* Les 2 vol. **200** fr.

OUVRAGE DE MM. APPELL ET CHAPPUIS.

Leçons de Mécanique élémentaire, *à l'usage des classes de Mathématiques A et B.* 4e édition entièrement refondue..... **20** fr.

OUVRAGE DE MM. APPELL ET DAUTHEVILLE.

Précis de Mécanique rationnelle. *Introduction à l'Étude de la Physique et de la Mécanique appliquée* à l'usage des Candidats aux certificats de licence et des Elèves des Ecoles techniques supérieures. 4e édition, revue et augmentée... ..... **100** fr.

OUVRAGE DE MM. APPELL ET KAMPÉ DE FÉRIET.

Fonctions hypergéométriques et hypersphériques. Polynomes d'Hermite..... **100** fr.

OUVRAGE DE MM. APPELL ET LACOUR.

Principes de la Théorie des Fonctions elliptiques. 2e édition, revue et augmentée, avec le concours de R. Garnier, Professeur à l'Université de Poitiers..... **80** fr.

COURS DE MÉCANIQUE DE LA FACULTÉ DES SCIENCES

TRAITÉ

DE

MÉCANIQUE RATIONNELLE

PAR

Paul APPELL

TOME QUATRIÈME. — FASCICULE I.

FIGURES D'ÉQUILIBRE D'UNE MASSE LIQUIDE HOMOGÈNE EN ROTATION

DEUXIÈME ÉDITION REVUE ET AUGMENTÉE

LEÇONS PUBLIÉES AVEC LE CONCOURS

DE

Alex. VÉRONNET

ASTRONOME A L'OBSERVATOIRE DE STRASBOURG.

PARIS

GAUTHIER-VILLARS ET Cie, ÉDITEURS

LIBRAIRES DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE

55, Quai des Grands-Augustins, 55

1932

Tous droits de traduction, de reproduction et d'adaptation réservés
pour tous pays.

531
Ap42
v. 41

PRÉFACE DU TOME IV.

Dès la découverte de l'attraction universelle, une question s'imposa aux mathématiciens comme aux astronomes : trouver les figures d'équilibre d'une masse liquide homogène, qui tourne uniformément autour d'un axe fixe et dont les particules s'attirent d'après la loi de Newton. Ce problème, qui présente un rapport lointain avec la recherche des figures des planètes, a occupé les plus grands géomètres, notamment Maclaurin et Jacobi; il est loin d'être résolu. On a trouvé des figures d'équilibre possibles, mais non toutes les figures d'équilibre : on ne sait même pas s'il existe un nombre fini ou infini de solutions. Ce qu'on a pu faire de plus général a été de donner des équations fonctionnelles, intégro-différentielles, fournissant toutes les figures possibles, à condition qu'on sache les résoudre. Après Maclaurin et Jacobi, les plus belles découvertes sur la question ont été faites par Poincaré et par Liapounoff qui ont su, par l'emploi des fonctions de Lamé et de leurs dégénérescences, trouver les figures d'équilibre infiniment voisines des ellipsoïdes de Maclaurin ou de Jacobi.

Une autre question, peut-être plus difficile encore, est de reconnaître si les figures obtenues sont stables ou instables. Il est évident que, sous le point de vue physique, les seules figures acceptables sont les figures stables : d'où la nécessité urgente de reconnaître la stabilité. Mais, dans ces questions délicates, le mot *stabilité* même doit être défini d'une façon précise, comme l'ont montré les divers auteurs qui se sont occupés du problème. D'après les beaux travaux de Tait et Thomson, que nous avons résumés, il faut, comme le fait Poincaré, distinguer entre la stabilité sécu-

laire et la stabilité temporaire. Une méthode féconde, qui appartient en propre à Poincaré, consiste dans l'étude des séries linéaires de figures d'équilibre d'un système, des figures limites, des figures de bifurcation, et enfin de l'échange des stabilités. Nous avons repris ces diverses questions, avec les recherches auxquelles elles ont donné lieu, notamment pour la figure dite *piriforme*.

J'avais pris ces divers problèmes comme programme de mon cours de *Mécanique céleste* dans le second semestre de 1914 : les leçons terminées en juin 1914 devaient être imprimées. La publication en a été retardée par la guerre. Ce retard nous a permis d'ajouter des perfectionnements dus aux travaux récents de plusieurs jeunes mathématiciens, MM. Globa-Mikhaïlenko, Pierre Humbert, Alexandre Véronnet. Nous avons placé à la fin de l'Ouvrage une liste, aussi complète que possible, des travaux publiés sur le sujet.

Je remercie M. Véronnet du concours qu'il m'a donné pour la rédaction du cours, pour la correction des épreuves, et pour différentes additions au texte primitif.

P. APPELL.

Klingenthal (Bas-Rhin),
1er août 1920.

PRÉFACE DE LA SECONDE ÉDITION.

Paul Appell a été enlevé à la Science au moment où la première édition de cet Ouvrage s'épuisait. Appelé à collaborer à cette première édition, j'ai le douloureux devoir et le dangereux honneur d'en préparer la seconde. Mais chacun sait que la rédaction parfaite des œuvres d'Appell ne nécessite aucune retouche ni correction.

Je n'ai eu qu'à ajouter, comme il était convenu, un dernier chapitre, sur les figures d'équilibre d'une masse soumise à la tension superficielle, pour résumer les très intéressants travaux de deux de ses élèves, MM. Globa-Mikhaïlenko et A. Charrueau. Ce dernier en particulier a complètement résolu le problème de l'évolution des figures, y compris la formation des anneaux, et discuté l'application des résultats à la fameuse expérience de Plateau, sur la sphère d'huile en rotation, expérience où l'on a voulu voir la démonstration physique de l'hypothèse cosmogonique de Laplace.

On verra dans ce chapitre comment les calculs cadrent parfaitement avec les expériences normales de Plateau, celles où la masse d'huile se creusait et se transformait en un anneau, mais sans se fractionner en deux parties. L'expérience que l'on est habitué à voir dans les livres, formation d'un anneau avec masse centrale, n'est obtenue que par un artifice d'expérience et le calcul mathématique ne peut l'interpréter qu'en admettant de grandes différences de rotation entre les parties. D'ailleurs l'expérience n'a aucun point de rapport avec l'hypothèse de Laplace, l'une faisant intervenir la tension superficielle et l'autre la gravitation.

On trouvera également, à la fin du n° 83, l'indication des

travaux de M. Orlow sur les ellipsoïdes de bifurcation, où $n = 5$, 6 et 7; au n° 106 le résultat des travaux de M. Cartan sur la stabilité ordinaire des ellipsoïdes; et au n° 107 le résumé des travaux sur les figures annulaires.

P. Appell avait limité ses Leçons de 1914, qui forment l'objet de ce tome quatrième, à l'étude de la rotation d'une masse homogène, pensant les étendre l'année suivante à une masse hétérogène et à la figure des planètes. Les événements ne lui ont pas permis d'achever cet Ouvrage. Je le lui avais proposé et préparé. Ce second fascicule du tome IV du *Traité de Mécanique rationnelle* pourra paraître peu après celui-ci.

ALEX. VÉRONNET.

Janvier 1931.

TRAITÉ

DE

MÉCANIQUE RATIONNELLE.

FIGURES D'ÉQUILIBRE D'UNE MASSE LIQUIDE EN ROTATION.

CHAPITRE PREMIER.

PROBLÈME. INDICATIONS HISTORIQUES.

1. **Problème.** — Nous nous occuperons dans ce Volume du problème suivant qui s'est posé dès que fut découverte l'attraction universelle et dont Newton lui-même s'est occupé.

Une masse liquide homogène isolée dans l'espace, c'est-à-dire soustraite à toute action extérieure, peut-elle se mouvoir à la façon d'un corps solide de telle manière que ses particules restent à des distances mutuelles invariables? Si un mouvement de cette nature existe, quelle est la forme de la masse liquide?

Plus généralement, un mouvement de ce genre est-il possible quand la masse liquide est soumise à une pression extérieure constante et quelle est alors la forme de la masse?

La réponse à la première partie de la question est facile. Le seul mouvement possible est celui dans lequel le centre de gravité prend un mouvement rectiligne uniforme, la masse tournant avec une vitesse angulaire constante ω autour d'un axe de direction fixe passant par le centre de gravité, axe qui constitue un axe principal d'inertie pour le liquide.

Quant à la seconde partie : détermination des formes possibles

de la masse, elle est loin d'être résolue. Les plus grands géomètres s'en sont occupés. Ils ont trouvé des formes possibles, mais non toutes les formes possibles.

Les données du problème peuvent être de deux natures différentes : 1° On peut donner la masse liquide et la vitesse angulaire de rotation ω; 2° On peut également donner la masse liquide et la valeur μ de la somme des moments des quantités de mouvement par rapport à l'axe de rotation. Cette somme est d'ailleurs

$$\mu = I\omega,$$

I désignant le moment d'inertie du liquide par rapport à l'axe. Ce second problème est distinct du premier, car lorsque la forme de la masse change, I varie. Il présente plus d'intérêt que lui au point de vue de la Mécanique céleste. En effet, dans l'hypothèse communément admise d'une planète d'abord à l'état fluide, lorsque cette planète en tournant se refroidit, I et ω changent, mais μ reste constant. La valeur de μ est donc une donnée initiale du problème.

Dans ces Leçons nous prendrons comme sujet principal l'exposé des travaux de Poincaré (*Acta Mathematica*, t. VII, et *Leçons sur les figures d'équilibre d'une masse fluide*, professées à la Sorbonne en 1900; Gauthier-Villars), en groupant autour d'eux les principales recherches récentes. Parmi ces dernières, il convient de citer au premier rang les recherches de Liapounoff. La plupart des travaux de ce géomètre sont publiés dans les *Mémoires de l'Académie de Pétrograd*. Des traductions ou des rédactions françaises ont paru dans les *Annales de la Faculté de Toulouse* (1904) et dans les *Annales de l'École Normale supérieure* (1909).

2. **Indications historiques.** — Nous pouvons distinguer trois périodes distinctes :

1° *De Newton à Laplace. Les ellipsoïdes de révolution et les anneaux.* — Newton a bien vu que sa loi de la gravitation devait permettre d'expliquer la figure des astres aussi bien que leurs mouvements. Il montre que la force centrifuge, combinée avec la pesanteur, doit donner un ellipsoïde de révolution aplati aux pôles. Il calcule le poids de la masse liquide contenue dans un

tube élémentaire dirigé suivant l'axe polaire et celui de la masse contenue dans un autre tube dirigé suivant un rayon équatorial quelconque, et il en déduit l'aplatissement dans le cas d'une Terre homogène (*Principia*, t. III).

Maupertuis (*Sur la figure des astres*, 1732) étudie l'équilibre d'une figure plane tournant autour d'un axe normal à son plan, en tenant compte d'une attraction centrale et de la force centrifuge. Il avait sans doute en vue les anneaux de Saturne.

Maclaurin (*Traité des fluxions*, 1742) applique à la masse homogène en rotation le principe de Pascal sur l'égalité des pressions, avant même que les principes de l'Hydrostatique soient parfaitement établis. Il étend à tous les points de la masse et à toutes les directions le calcul primitif de Newton. Il montre ainsi que l'ellipsoïde de révolution est bien une figure d'équilibre, où la résultante des forces est partout normale à la surface. Les figures d'équilibre qui sont des ellipsoïdes de révolution portent depuis lors le nom d'*ellipsoïdes de Maclaurin*.

Simpson en 1743 étudie les conditions d'existence de ces ellipsoïdes. Il établit que la condition nécessaire et suffisante de l'équilibre est l'égalité de pression à la surface. Il découvre la limite supérieure de l'expression

$$h = \frac{\omega^2}{2\pi f \rho}$$

en prenant la vitesse de rotation comme paramètre. Cette expression, où ρ désigne la densité et f la constante de la gravitation, doit être plus petite que 0,2247... pour que l'ellipsoïde de révolution existe. Il montre enfin, par le calcul numérique, qu'au-dessous de cette vitesse critique il y a deux ellipsoïdes qui tendent respectivement vers la sphère ou vers un disque aplati, quand la vitesse tend vers zéro. Ce fait sera démontré plus tard par Laplace à la suite d'une remarque de d'Alembert.

Clairaut, dans son livre remarquable sur la *Figure de la Terre* (1743), donne à ces démonstrations et à ces résultats leur forme définitive. Il va plus loin et étend ses calculs à l'étude d'une masse hétérogène, comme seraient la Terre et les planètes. Il donne alors les formules qui relient l'aplatissement et la pesanteur à la densité et à la force centrifuge, dans le cas d'une vitesse de rota-

tion assez lente. Travail tellement parfait pour l'époque qu'il n'a été repris et continué que plus de cent ans plus tard.

Ce même problème se posait pour la figure d'une nébuleuse qui se refroidit et se contracte en tournant. Laplace dut y songer. Dès 1776, il faisait remarquer qu'on n'avait pas de solution générale de ce problème, mais seulement des études de cas particuliers, des solutions purement empiriques.

C'est un peu plus tard que Legendre fait connaître sa méthode fondamentale qui permettra de rechercher directement, avec l'approximation voulue, les figures d'équilibre voisines de la sphère (*Histoire de l'Académie des Sciences* pour 1789). C'est à cette méthode, de toute première importance en Physique mathématique, que sont dus tous les progrès les plus récents sur le problème posé ici. Il considère des dénivellations faibles et se donne en chaque point la cote par rapport à la sphère. Il la définit en fonction des coordonnées sphériques et exprime le potentiel au moyen des harmoniques sphériques ou polynomes de Legendre [1].

C'est l'extension à une fonction de plusieurs variables de la méthode qui permet d'exprimer une fonction d'une variable par une série de fonctions trigonométriques, sinus et cosinus. Le potentiel provenant de l'attraction et le potentiel provenant de la force centrifuge s'expriment donc ainsi en fonctions harmoniques. Il suffit d'identifier l'équation de la surface avec celle qui exprime le potentiel total à la surface : ce potentiel doit être constant. On obtient entre les coefficients une série d'équations qui permettent de déterminer les éléments du problème. C'est cette méthode que Poincaré et Liapounoff ont généralisée et appliquée à l'ellipsoïde au moyen des fonctions de Lamé, qui remplacent ici les fonctions sphériques et qui permettent de traiter le problème dans toute sa généralité.

Laplace démontre par cette méthode que l'ellipsoïde aplati, peu différent d'une sphère, est encore figure d'équilibre même sous l'attraction d'un corps extérieur. Il trouve également que l'anneau

---

[1] La formule était établie pour les points non situés sur la surface. Poisson montre dans les *Additions* à la *Connaissance des Temps* pour 1829, p. 366, qu'elle s'applique à tous les points. Callandreau précise les démonstrations de Poisson dans un *Mémoire sur la théorie de la figure des planètes* (*Annales de l'Observatoire de Paris*, t. XIX, 1889, et *Comptes rendus*, t. CIII, p. 33 et 195).

avec corps central est une figure d'équilibre; mais ces derniers calculs ne présentent pas encore toute la précision désirable.

2° *De Jacobi à Poincaré. Les ellipsoïdes à trois axes.* — On crut pendant longtemps qu'il n'y avait pas d'autre figure d'équilibre que l'ellipsoïde aplati et l'anneau. Il faut attendre jusqu'en 1834 pour voir s'introduire des idées neuves et des solutions nouvelles, qui devaient ouvrir une voie féconde. Jacobi fait remarquer que le potentiel de l'ellipsoïde à trois axes s'exprime par une fonction quadratique des coordonnées de la surface, comme le potentiel de la force centrifuge et l'équation de l'ellipsoïde. Il montre ainsi que les ellipsoïdes à trois axes inégaux tournant autour du petit axe peuvent être des figures d'équilibre : ils portent, depuis, le nom d'*ellipsoïdes de Jacobi*. Il suffisait, en effet, comme dans le problème de Legendre, d'identifier l'équation de la surface, et le potentiel total à la surface, pour déterminer les éléments d'un ellipsoïde répondant à la question.

Liouville en a fait la démonstration analytique (*Journal de Mathématiques*, 1834). D'autres démonstrations ont été données en particulier par Smith (1838) et Plana (1853). Otto Meyer, puis Liouville, en prenant comme variable la vitesse de rotation, ont fait la discussion complète des équations qui se présentent ici.

Poincaré fait remarquer (*Revue générale des Sciences*, 1892, p. 67) que ce fut un étonnement dans le monde scientifique de constater qu'il pouvait y avoir des figures d'équilibre d'un corps en rotation qui n'étaient pas des figures de révolution. De Pontécoulant avait cru pouvoir affirmer le contraire et cela paraissait assez plausible. En tout cas la résultante des forces était bien partout normale à la surface dans un ellipsoïde de Jacobi. Il y avait équilibre. L'étonnement devait être bien plus grand à l'annonce des figures piriformes d'équilibre.

La valeur limite de l'expression h était plus faible encore pour les ellipsoïdes à trois axes que pour les ellipsoïdes de révolution. Elle ne devait pas dépasser 0,1871... Avec des vitesses de rotation de plus en plus faibles, l'ellipsoïde s'allonge de plus en plus. L'axe moyen se rapproche du petit. La figure tend vers celle des ellipsoïdes de révolution allongés, en forme d'aiguille. Il y a donc désormais pour les faibles vitesses trois figures d'équilibre pos-

sibles théoriquement : la sphère, le disque, l'aiguille, c'est-à-dire des figures limites à trois, à deux, à une dimension. Entre ces limites il y a deux séries distinctes de figures d'équilibre : les ellipsoïdes aplatis et de révolution de Maclaurin et les ellipsoïdes allongés et à trois axes de Jacobi, avec un ellipsoïde commun, où la seconde série se sépare de la première.

Mathiessen (1859) étudie de nouveau la figure annulaire. Il établit de plus que le cylindre indéfini de section elliptique est encore une figure d'équilibre. Dans ce cas la rotation se fait autour de l'axe du cylindre. C'est le problème simplifié, puisqu'il suffit de considérer une section plane : ce problème a été étudié plus complètement plus tard par Jeans (*Philosophical Transactions*, A, t. 200, 1903) et par Globa-Mikhaïlenko (*Journal de Mathématiques*, 1916).

3° *Poincaré et Liapounoff. Les figures de Poincaré.* — Le problème traité par Liouville fut regardé comme suffisamment résolu et laissé dans l'oubli pendant près de 25 ans. Deux faits nouveaux le font entrer dans une nouvelle phase.

En 1883 paraît la troisième édition du *Treatise on natural Philosophy* de Thomson et Tait. Les auteurs y indiquent qu'en considérant l'augmentation progressive du moment de rotation, au lieu de la vitesse de rotation, on obtient une série de figures stables, partant de la sphère, suivant les ellipsoïdes de Maclaurin, jusqu'à celui qui donne naissance aux jacobiens, puis une série d'ellipsoïdes de Jacobi à trois axes, qui en s'allongeant doivent finir par se diviser en deux masses distinctes. Mais on ne savait rien sur les figures d'équilibre intermédiaires entre les ellipsoïdes de Jacobi et la figure de rupture : Thomson et Tait signalent cette lacune.

Déjà Tchebytchef, en 1882, s'était posé la question de savoir ce que devenait l'ellipsoïde de Maclaurin quand il arrivait à sa vitesse de rotation critique maximum, qu'il ne pouvait pas dépasser. Si l'on augmentait cette vitesse limite, infranchissable mathématiquement, que se passait-il? La masse allait-elle se briser? Serait-ce l'ellipsoïde de rupture? Y aurait-il bifurcation vers d'autres figures d'équilibre? Il avait fait part de ce problème à Liapounoff. Celui-ci appliqua alors la méthode de Legendre, aux figures peu différentes d'un ellipsoïde, comme Legendre l'avait d'abord appliquée aux

figures voisines d'une sphère. En 1884, il montra qu'il y a d'autres surfaces d'équilibre voisines des ellipsoïdes de Maclaurin et de Jacobi et il en poursuivit l'étude très loin. Ses travaux publiés en russe ne furent traduits et connus en France que 20 ans plus tard (1904).

C'est un autre travail qui attire l'attention de Poincaré sur la question. Mme Kowalevski avait envoyé en 1874, à l'Université de Gottingue, un Mémoire remarquable sur l'anneau de Saturne, où elle établissait rigoureusement l'existence de la figure annulaire comme figure d'équilibre. Ce Mémoire est publié en 1885. Poincaré s'occupe alors de la question de l'anneau, puis du problème général de Tait et Thomson (*Comptes rendus* et *Bulletin astronomique*, 1885). Dans un travail d'ensemble, il démontre que les ellipsoïdes de Maclaurin et de Jacobi forment des séries continues possédant une infinité de points de bifurcation discontinus où apparaissent de nouvelles figures d'équilibre, différentes des ellipsoïdes et donnant naissance à autant de séries nouvelles ou de rameaux. Il calcule la position de ces points, il détermine la forme de ces nouvelles figures, dont la plus simple se rapproche de l'œuf ou de la poire, forme ovoïde ou piriforme. Il en indique l'étranglement possible. C'est l'ensemble de ce travail de tout premier ordre, chef-d'œuvre de Mécanique analytique, qui a été publié au Tome VII des *Acta Mathematica*, 1885. Puis dans les *Leçons sur les figures d'équilibre*, Poincaré démontrait en passant que la fonction h de la vitesse de rotation ne pouvait en aucun cas être supérieure à un; autrement il y aurait rupture, la force résultante étant alors dirigée vers l'extérieur. Crudeli a démontré que dans le cas d'une surface convexe cette limite est abaissée à $\frac{1}{2}$ (*Rend. della Accad. dei Lincei*, 1er semestre 1910, p. 666). Poincaré s'est borné à la première approximation. Liapounoff a donné une méthode permettant de pousser l'approximation de plus en plus loin. Il est juste d'ajouter que M. Liapounoff démontra l'existence des nouvelles figures en établissant la convergence de certaines séries : c'est l'appareil analytique nécessaire à cette démonstration qui rend difficile la lecture des Mémoires de Liapounoff.

C'est G. H. Darwin qui a fait les calculs numériques déterminant d'une façon précise la forme de la première figure de bifur-

cation et qui lui a donné le nom de *figure piriforme* (*Phil. Trans.*, A, t. 198, 1902). P. Humbert dans sa thèse (1918) a montré que les sections principales de la figure piriforme ne présentent pas de points d'inflexion et il a calculé les figures de bifurcation suivantes.

4° *Stabilité des figures d'équilibre.* — Une fois un mouvement de la masse liquide trouvé, il faut voir s'il est stable, c'est-à-dire si, en déplaçant, infiniment peu et d'une manière arbitraire, les molécules les unes par rapport aux autres et en leur donnant des vitesses relatives infiniment petites, on obtient un nouveau mouvement infiniment peu différent du mouvement de rotation primitif. Les figures stables seront les seules qui pourront exister dans la nature. Les résultats principaux sur cette question sont encore dus à Thomson, Liapounoff et Poincaré. Toutefois cette question plus compliquée est restée encore bien obscure.

Les premiers auteurs s'en étaient peu occupés. Laplace reconnaît qu'un anneau de Saturne fluide serait instable. La démonstration rigoureuse en a été donnée par Mme Kowalevski.

Lagrange a démontré par la théorie des petits mouvements que, pour un système soumis à des forces qui dérivent d'un potentiel, il y a équilibre stable quand l'énergie potentielle du fluide est maximum. Il ne démontrait pas le théorème dans sa généralité. C'est Lejeune-Dirichlet qui en a donné la démonstration rigoureuse et classique, indépendamment de la théorie des petits mouvements. D'ailleurs, l'existence d'un maximum est une condition suffisante, mais elle ne paraît pas nécessaire et l'équilibre pourrait être stable sans cela. La réciproque du théorème de Dirichlet a été démontrée pour un cas très étendu par Liapounoff (*Journal de Mathématiques*, 1896). Cette démonstration a été reprise et précisée par Hadamard (*Mémoire* publié dans les *Comptes rendus*, 1897).

Thomson et Tait, dans leur *Treatise on natural Philosophy*, introduisent une notion nouvelle et fondamentale, en distinguant la stabilité séculaire et la stabilité temporaire ou ordinaire, dans l'équilibre relatif par rapport à des axes entraînés avec le corps. Ils montrent que, s'il n'y a pas de frottements, la condition de Lejeune-Dirichlet est toujours suffisante. Il y aura équilibre stable dès qu'elle sera réalisée et l'équilibre se conservera indéfiniment.

Mais dans un corps qui se déforme il s'introduit des frottements dus à la viscosité. Dans ce cas, la condition de Lejeune-Dirichlet devient nécessaire. Si elle n'est pas remplie, l'équilibre pourra exister, mais il pourra être détruit à la longue par la perte d'énergie due aux frottements.

Poincaré et Liapounoff ont remarqué que, s'il y a des déformations quelconques, les mouvements sont malaisément définis par rapport aux axes mobiles. En tout cas, Poincaré simplifie d'abord le problème en considérant la stabilité dans le cas de l'équilibre absolu par rapport à des axes fixes, pour un système à n degrés de liberté. Il définit la fonction des forces, au voisinage d'une position d'équilibre, de façon que les termes principaux forment une somme de n carrés, avec n coefficients qui sont les coefficients de stabilité. Si tous ces coefficients sont négatifs, la fonction est maximum dans la position considérée : il y a équilibre stable. Si un ou plusieurs de ces coefficients sont positifs, il y a un ou plusieurs degrés d'instabilité. L'équilibre est plus ou moins stable. Le nombre n peut devenir infini.

Quand deux séries de figures d'équilibre se croisent, leurs coefficients de stabilité deviennent égaux. L'un d'eux s'annule en général et change de signe. Il y a échange des stabilités. La série qui était stable devient instable et réciproquement.

Poincaré étend ces résultats à l'équilibre relatif par rapport à des axes tournant avec le fluide. Il faut alors faire entrer la force centrifuge dans la fonction de forces et l'on obtient une nouvelle fonction qui doit rester maximum. Cette condition du maximum qui est nécessaire n'est plus suffisante.

Les ellipsoïdes de Maclaurin sont stables jusqu'à l'ellipsoïde de bifurcation (stabilité séculaire). Ils le restent même toujours au delà s'il n'y a pas de frottements (stabilité ordinaire). Ils prennent ensuite un degré d'instabilité à chaque nouveau point de bifurcation.

Au premier ellipsoïde de bifurcation la stabilité passe aux ellipsoïdes de Jacobi, jusqu'à l'ellipsoïde de bifurcation qui conduit à la figure piriforme. Au delà, les ellipsoïdes de Jacobi prennent également un degré d'instabilité à chaque nouveau point de bifurcation.

Mais le critérium de Poincaré pour l'équilibre relatif ne s'ap-

plique plus aux figures non ellipsoïdales, comme il en convient lui-même à la suite d'une remarque de Schwarzschild (1896) et il donne alors les formules qui peuvent permettre de trancher la question en ce point douteux (*Phil. Trans.*, 1902). Darwin fait les calculs nécessaires, mais seulement jusqu'à la deuxième approximation, et il trouve que la figure piriforme est stable (*Phil. Trans.*, 1902, 1908), mais ce résultat paraît inexact.

Liapounoff de son côté détermine une autre fonction que celle de Poincaré qui doit être maximum dans le cas de la stabilité, quelle que soit la figure. Il fait les calculs relatifs à la figure piriforme et démontre qu'elle est instable (1908).

Jeans enfin a recommencé les calculs de Darwin en appliquant la formule de Poincaré jusqu'à la troisième approximation (*Memoir of the Roy. Astr. Soc.*, t. LXII, 1917). Il montre que la deuxième approximation était insuffisante et que la figure piriforme est instable, conformément à la démonstration de Liapounoff.

3. **Autres recherches.** — On peut reprendre le même problème pour une *masse hétérogène* où la densité varie d'une façon quelconque. C'est un problème plus difficile et beaucoup moins étudié que le précédent. Cependant, c'est le seul qui soit applicable à la Mécanique céleste et à la Figure de la Terre.

Sur ce point Clairaut a donné une solution remarquable du problème, en supposant la figure d'équilibre voisine de celle d'une sphère et la masse constituée par des couches homogènes concentriques. Il résout complètement le problème dans le cas d'une vitesse faible et uniforme dans toute la masse.

Les principaux travaux tentés depuis sur les ellipsoïdes hétérogènes à trois axes ou de révolution, sont dus à M. Hamy (Thèse de doctorat, *Journal de Mathématiques*, t. VI, 1890) et à M. Véronnet (Thèse de doctorat, *Journal de Mathématiques*, 4e fascicule, 1912). Cette étude formera le second fascicule de cet Ouvrage.

D'autres recherches ont été faites dans l'ordre d'idées suivant : on peut se demander quels sont les mouvements qui laisseraient la surface extérieure invariable de forme, tandis que les éléments intérieurs et superficiels du fluide subiraient des *déplacements relatifs*, la pression pouvant être supposée nulle ou constante à la surface.

On peut chercher encore si un liquide peut se mouvoir de façon que sa surface extérieure varie et *se déforme* en fonction du temps, le volume restant constant. Les principales recherches sur ce sujet sont dues à Dirichlet et à Riemann pour le cas où la surface extérieure est ellipsoïdale. Plus récemment, Stekloff a résumé et poussé plus loin leurs travaux dans un Mémoire traduit dans les *Annales de l'École Normale*, 1908, 1909.

M. Globa-Mikhaïlenko a cherché aussi comment la *tension superficielle* modifie les formes ellipsoïdales précédemment trouvées. Son effet serait évidemment insignifiant sur des masses liquides ayant le volume et la densité des corps célestes, car elle est proportionnelle à la courbure. Mais pour des masses plus petites, cette action peut jouer un rôle. Il montre que, comme on pouvait le prévoir, la pression capillaire tend à arrondir les ellipsoïdes. Prenant ensuite des masses assez petites pour que leur attraction newtonienne à la surface soit négligeable devant la pression capillaire, il étudie les figures d'équilibre d'une masse liquide homogène tournant uniformément autour d'un axe fixe et soumise uniquement à la tension superficielle. Ces conditions sont approximativement réalisées dans les expériences de Plateau. Le problème a été repris et complété par Charrueau. C'est l'objet du Chapitre IX de cette nouvelle édition.

On peut rattacher encore à cette question les études sur la rotation d'un *corps variable*, l'influence des déformations de la surface sur le déplacement de l'axe de rotation, la variation du Pôle et des latitudes, question qui a fait l'objet de nombreux travaux dans ces dernières années. Citons enfin les travaux où l'on tient compte aussi de l'*élasticité* et de la rigidité d'une enveloppe ou de l'ensemble de la masse. On sait que lord Kelvin a démontré que l'enveloppe terrestre devait avoir une rigidité comparable à celle de l'acier, pour expliquer la constante de la précession, chiffre qui s'est trouvé vérifié par la mesure des marées de l'écorce terrestre, qui égalent en hauteur le tiers de celles de l'Océan.

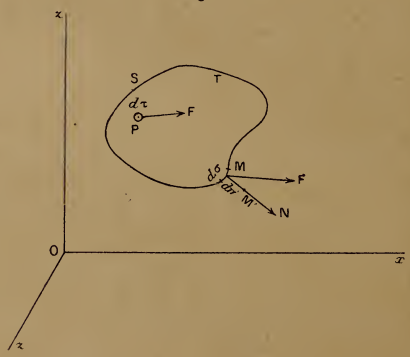
CHAPITRE II.

ATTRACTION ET POTENTIEL.

Nous résumons ici les formules fondamentales relatives à l'attraction et au potentiel, exposées dans le Tome III, Chapitres XXVIII et XXIX.

4. **Formule de Green.** — Soient G, H, K trois fonctions finies et continues de x, y, z, admettant des dérivées partielles du pre-

Fig. 1.



mier ordre dans un domaine, et soit un certain volume T, compris dans le domaine et limité par la surface S. Appelons $d\tau$ l'élément de volume, $d\sigma$ l'élément de surface, α, β, γ les cosinus directeurs de la normale extérieure à l'élément $d\sigma$ (*fig.* 1), on a la relation suivante qui s'applique à tout volume, même composé de plusieurs

parties distinctes :

$$(1)\qquad \int\int\int_T \left(\frac{\partial G}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial y} + \frac{\partial K}{\partial z}\right) d\tau = \int\int_S (\alpha G + \beta H + \gamma K)\, d\sigma.$$

Pour interpréter géométriquement cette formule, considérons le vecteur F ayant pour projections G, H, K (champ de vecteurs); on appelle *divergence* du vecteur en un point la quantité

$$(2)\qquad \operatorname{div} F = \frac{\partial G}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial y} + \frac{\partial K}{\partial z}.$$

Cette quantité a une signification géométrique indépendante du choix des axes; cela résulte de ce que la quantité

$$\alpha G + \beta H + \gamma K = F_n,$$

qui est la projection du vecteur G, H, K sur la normale extérieure, est aussi un invariant dans le cas d'un changement d'axes. La formule de Green s'écrit alors avec ces notations, où ne figurent plus que des éléments invariants :

$$(3)\qquad \int_T \operatorname{div} F\, d\tau = \int_S F_n\, d\sigma.$$

Cas particulier intéressant. — Posons maintenant

$$G = U\frac{\partial V}{\partial x}, \qquad H = U\frac{\partial V}{\partial y}, \qquad K = U\frac{\partial V}{\partial z},$$

on a

$$\frac{\partial G}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial y} + \frac{\partial K}{\partial z} = U\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}\right) + \frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial z}\frac{\partial V}{\partial z},$$

et l'équation (1) devient (Δ étant l'opérateur de Laplace)

$$\int_T U\,\Delta V\, d\tau + \int_T \left(\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial z}\frac{\partial V}{\partial z}\right) d\tau$$
$$= \int_S U\left(\alpha\frac{\partial V}{\partial x} + \beta\frac{\partial V}{\partial y} + \gamma\frac{\partial V}{\partial z}\right) d\sigma.$$

Posons encore

$$\alpha\frac{\partial V}{\partial x} + \beta\frac{\partial V}{\partial y} + \gamma\frac{\partial V}{\partial z} = \frac{dV}{dn}.$$

Cette expression est appelée la *dérivée suivant la normale exté-*

rieure, dV étant la variation de V quand on passe du pied M de la normale au point M′ distant de dn sur cette normale. On a alors

$$(4)\quad \int_T U\,\Delta V\,d\tau + \int_T \left(\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial z}\frac{\partial V}{\partial z}\right) d\tau = \int_S U\frac{dV}{dn}\,d\sigma.$$

Si les fonctions considérées G, H, K dérivent d'un potentiel V on a $U = 1$, et la formule de Green devient

$$\int_T \Delta V\,d\tau = \int_S \frac{dV}{dn}\,d\sigma.$$

On peut faire encore dans cette formule $U = V$ ou $U = \varphi(V)$, et l'on obtient d'autres formes remarquables de la formule de Green.

Changeons, par exemple, V en U et U en V; on a

$$\int_T V\,\Delta U\,d\tau + \int_T \left(\frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y}\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial z}\frac{\partial U}{z}\right) d\tau = \int_S V\frac{dU}{dn}\,d\sigma.$$

En retranchant ces deux dernières expressions, on obtient

$$(5)\qquad \int_T (U\,\Delta V - V\,\Delta U)\,d\tau = \int_S \left(U\frac{dV}{dn} - V\frac{dU}{dn}\right) d\sigma.$$

Nous aurons à considérer en général des fonctions uniformes et finies à l'intérieur des domaines étudiés. Si pourtant, en certains points du volume, la fonction sous le signe *somme* devient infinie, on tourne la difficulté de la façon suivante. On entoure le point singulier A d'une sphère σ d'un rayon très petit, ayant ce point

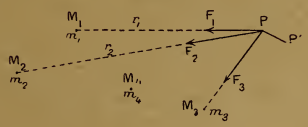
Fig. 2.

pour centre. Dans le volume compris entre la surface S et la sphère σ, il n'y a plus de point singulier et l'on peut y appliquer

la formule de Green (*fig.* 2). On remarquera toutefois que la normale extérieure au volume, sur la surface σ, est dirigée vers l'intérieur de cette sphère. Dans chaque cas, on recherchera alors la limite de l'intégrale étendue au volume de la petite sphère quand le rayon de σ tend vers zéro.

5. **Attraction et potentiel.** — 1° *Attraction de points isolés.* — Soient $m_1, m_2, \ldots, m_p$ des points fixes attirants, P le point attiré de masse μ, f la constante de la gravitation. L'attraction newtonienne de m_1 est une force $F_1 = -f\frac{\mu m_1}{r_1^2}$. Si P vient en P′, point infiniment voisin (*fig.* 3), le travail de la résultante est égal

Fig. 3.



à la somme des travaux élémentaires des composantes

$$\mathfrak{T}_e = -f\mu\frac{m_1}{r_1^2}\,dr_1 - \ldots - f\mu\frac{m_p}{r_p^2}\,dr_p = f\mu\,d\left(\frac{m_1}{r_1} + \frac{m_2}{r_2} + \ldots + \frac{m_p}{r_p}\right).$$

C'est une différentielle totale. Il existe donc une fonction de forces ou potentiel $f\mu V$:

$$(6)\qquad V = \frac{m_1}{r_1} + \frac{m_2}{r_2} + \ldots + \frac{m_p}{r_p} = \sum\frac{m}{r}, \qquad \mathfrak{T}_e = f\mu\,dV;$$

$$(7)\qquad X = f\mu\frac{\partial V}{\partial x}, \qquad Y = f\mu\frac{\partial V}{\partial y}, \qquad Z = f\mu\frac{\partial V}{\partial z},$$

X, Y, Z étant les projections de la résultante sur les trois axes.

V est une fonction essentiellement positive qui devient nulle à l'infini. Elle est uniforme et finie partout, sauf aux points attirants. On peut d'ailleurs prendre $\mu = 1$ et $f = 1$ en changeant l'unité de temps; alors

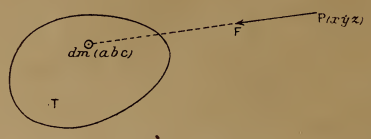
$$(7')\qquad X = \frac{\partial V}{\partial x}, \qquad Y = \frac{\partial V}{\partial y}, \qquad Z = \frac{\partial V}{\partial z}.$$

Enfin cette fonction V vérifie l'équation $\Delta V = 0$ en dehors des masses attirantes.

2° *Masses continues.* — Nous nous occuperons d'abord des volumes et, plus loin, des surfaces et des lignes attirantes, et nous les supposerons finis et limités.

La densité ρ est une fonction des coordonnées a, b, c d'un élément dm du volume. Elle peut être discontinue, et d'ailleurs la

Fig. 4.



surface qui limite le corps sera toujours une surface de discontinuité pour la densité (*fig.* 4).

Le potentiel devient ici

$$(6') \quad V = \sum \frac{m}{r} = \int\int\int_T \rho \frac{d\tau}{r}, \qquad r = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2},$$

$dm = \rho\, d\tau = \rho\, da\, db\, dc$ étant la masse de l'élément de volume. L'intégration est faite par rapport à a, b, c, et le résultat V est une fonction de x, y, z.

Les composantes suivant les axes de l'attraction sur $P(x, y, z)$ seront

$$\frac{\partial V}{\partial x}, \quad \frac{\partial V}{\partial y}, \quad \frac{\partial V}{\partial z}.$$

6. **Étude de la fonction V ou potentiel.** — 1° V est fini et continu dans tout l'espace, extérieur ou intérieur aux masses attirantes. A l'infini, V devient nul.

Soit, en effet, O un point du corps attirant; supposons le point attiré P situé très loin du corps attirant et par conséquent de O. Appelons R la distance OP et développons V suivant les puissances croissantes de $\frac{1}{R}$; on a

$$(8) \qquad V = \frac{M}{R} + \frac{A_1}{R^2} + \frac{A_2}{R^3} + \ldots.$$

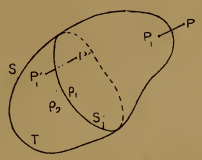
Les coefficients $A_1, A_2, \ldots$ dépendent de la direction dans laquelle P s'éloigne indéfiniment. Alors V tend vers zéro comme $\frac{M}{R}$ quand R augmente indéfiniment, c'est-à-dire $\lim VR = M$.

Si le point O est au centre de gravité G, alors $A_1 = 0$, et $VR - M$ est, pour R très grand, de l'ordre de $\frac{1}{R^2}$.

2° Les dérivées premières $\frac{\partial V}{\partial x} \cdots$ sont finies et continues dans tout l'espace. A l'infini elles sont nulles, de l'ordre de $\frac{1}{R^2}$.

3° Les dérivées secondes et en particulier $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$, sont partout finies; mais elles sont discontinues. Chaque fois que P passe par une surface de discontinuité S_1 de la densité ρ, les dérivées secondes subissent également une discontinuité (*fig.* 5). Il

Fig. 5.



en est ainsi en particulier quand P traverse la surface S du corps attirant. On a, en effet, à l'intérieur

$$\Delta V = -4\pi\rho, \tag{9}$$

ρ étant la densité au point x, y, z, et à l'extérieur

$$\Delta V = 0.$$

Si donc ρ est discontinue, l'une au moins des dérivées secondes l'est aussi.

Ces propriétés sont fondamentales et caractéristiques. Si une fonction les possède, c'est un *potentiel*.

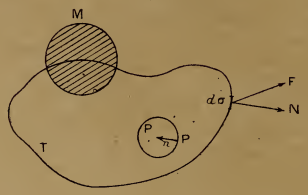
7. **Théorème de Gauss.** — Soient une masse attirante de potentiel V, et S une surface fermée quelconque; cherchons l'intégrale du second membre de la formule de Green, écrite sous

la forme (4)

$$\int_T U\,\Delta V\,d\tau + \int_T \left(\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial z}\frac{\partial V}{\partial z}\right) d\tau = \int_S U\,\frac{dV}{dn}\,d\sigma.$$

Faisons $U = 1$ et appliquons-la au volume T limité par la sur-

Fig. 6.



face S (*fig.* 6); on a

$$\int_T \Delta V\,d\tau = \int_S \frac{dV}{dn}\,d\sigma,$$

et puisque dans tout l'espace $\Delta V = -4\pi\rho$, on a

$$(10) \qquad \int_S \frac{dV}{dn}\,d\sigma = -4\pi M', \qquad M' = \int_T \rho\,d\tau,$$

M′ étant la quantité de masse attirante contenue à l'intérieur de S.

De ce résultat, on peut déduire que *le potentiel ne peut avoir, en dehors des masses attirantes, ni maximum ni minimum.*

En un point P_0 par exemple, extérieur à M, il ne peut pas y avoir de minimum. En effet, s'il y avait minimum, le potentiel augmenterait quand on s'éloignerait de P_0 dans une direction quelconque. Entourons P_0 d'une petite sphère ayant son centre en P_0 et appliquons à cette sphère, de rayon assez petit pour qu'elle ne contienne pas de masses attirantes, le théorème de Gauss; on a

$$\int_S \frac{dV}{dn}\,d\sigma = 0, \qquad \text{or} \qquad \frac{dV}{dn} = \frac{dV}{dr},$$

r étant la distance du point M de la petite sphère à P_0. On peut prendre r assez petit pour qu'en tous les points de la sphère $\frac{dV}{dr}$ soit positif, si le potentiel augmente par hypothèse à partir

de P_0. Dans ce cas, tous les éléments de l'intégrale seraient positifs et l'intégrale ne pourrait pas être nulle. On montrerait de même qu'il ne peut pas exister de maximum.

Il ne peut pas non plus y avoir de minimum à l'intérieur des masses attirantes, mais il peut y avoir un maximum. En effet, procédons de même, $\frac{dV}{dn}$ serait encore positif pour tous les points de la petite sphère et l'intégrale positive; or, le théorème de Gauss

$$\int_S \frac{dV}{dn}\, d\sigma = -4\pi M'$$

exige, au contraire, que cette intégrale soit négative.

Sur une *surface fermée ne comprenant pas de masses attirantes*, le potentiel V sera compris entre deux limites g et h telles que

$$0 \leqq g \leqq V \leqq h.$$

A l'intérieur de cette surface, V sera aussi compris entre g et h; autrement, en un certain point de T, le potentiel V passerait par un maximum ou par minimum. En particulier, si $g = h$, V est constant sur la surface et par conséquent à l'intérieur. On peut démontrer directement cette dernière proposition. Écrivons la formule de Green relative au champ de vecteurs $U\frac{\partial U}{\partial x}$, $U\frac{\partial U}{\partial y}$, $U\frac{\partial U}{\partial z}$,

$$\int_T U\,\Delta U\, d\tau + \int_T \left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2\right] d\tau = \int_S U\frac{dU}{dn}\, d\sigma.$$

Soit $V = C$ la valeur constante du potentiel sur S. Considérons la fonction $U = V - C$ et appliquons-lui la formule de Green. On a $\Delta U = \Delta V = 0$ puisqu'il n'y a pas de masse attirante dans T. De plus, $\int U\frac{dU}{dn}\, d\sigma = 0$ puisque U est constamment nulle sur la surface. Il reste

$$\int_T \left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2\right] d\tau = 0;$$

les dérivées partielles de U sont donc nulles en tous les points de T. Ainsi U est une constante et, comme U est nul à la surface, U est nul dans tout le domaine. Donc $V = C$ à l'intérieur de T.

On appelle *fonction harmonique* dans un domaine S une fonction uniforme, finie et continue dans ce domaine, possédant les dérivées nécessaires et satisfaisant à l'équation $\Delta V = 0$ dans ce domaine. Une fonction harmonique constante sur une surface est constante à l'intérieur.

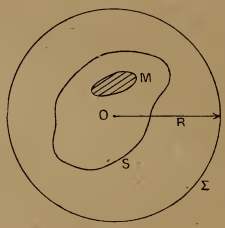
Considérons maintenant une *surface à l'intérieur de laquelle sont les masses attirantes.* Sur S, le potentiel est compris entre deux limites g et h. Le potentiel ne pourra pas prendre à l'extérieur de valeurs supérieures à h, car à l'infini V tend vers zéro, et si quelque part il devenait plus grand que h, il y aurait en un certain point un maximum de V, ce qui est impossible.

Supposons $g = h = C$. Sur la surface $V = C$ et à l'extérieur, on a $V < C$.

Enfin si $V = 0$ sur la surface, il est nul partout à l'extérieur de S. On peut donner une démonstration directe de ce dernier point.

Considérons une sphère Σ de très grand rayon R comprenant S

Fig. 7.



à son intérieur, et appliquons le théorème de Green au volume compris entre S et Σ (*fig.* 7),

$$\int_T V\,\Delta V\,d\tau + \int_T \left[\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2\right] d\tau$$
$$= \int_\Sigma V\,\frac{dV}{dn}\,d\sigma + \int_S V\,\frac{dV}{dn}\,d\sigma.$$

$\Delta V = 0$ dans cet espace; de plus, V est nul sur S. Le premier et le dernier terme sont nuls. L'intégrale relative à la sphère tend

vers zéro quand R est très grand, car sur la sphère

$$\frac{dV}{dn} = \frac{dV}{dR}, \qquad V = \frac{M}{R} + \ldots, \qquad \frac{dV}{dR} = -\frac{M}{R^2} + \ldots, \qquad d\sigma = R^2\, d\omega,$$

en appelant $d\omega$ un élément superficiel de la sphère concentrique de rayon 1.

L'intégrale qui est relative à la sphère Σ devient (K étant fini)

$$\int_\Sigma -\frac{M}{R}\frac{M}{R^2} R^2\, d\omega = -\frac{1}{R}\int_T K\, d\omega.$$

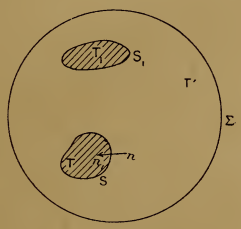
Elle tend bien vers zéro quand R augmente indéfiniment; il reste

$$\int_T \left[\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2\right] d\tau = 0,$$

d'où il suit que V est constant dans tout l'espace extérieur à S, et comme il est nul à l'infini, il est nul partout.

8. **Formule de Poincaré.** — Étant données deux fonctions V et V_1 qui possèdent les propriétés d'un potentiel, la première par rapport à un corps T limité par une surface S et de densité ρ, la

Fig. 8.



seconde par rapport à un corps T_1, S_1, ρ_1 (*fig.* 8), on aura, pour l'espace entier,

$$(11) \qquad \int V_1\, \Delta V\, d\tau + \int \left(\frac{\partial V_1}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial V_1}{\partial y}\frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial V_1}{\partial z}\frac{\partial V}{\partial z}\right) d\tau = 0.$$

Pour le démontrer, prenons un point O comme centre et décrivons une sphère de grand rayon Σ comprenant T et T_1 dans son

intérieur. La formule de Green appliquée au volume T′ compris entre S et Σ donne

$$\int_{T'} V_1 \Delta V \, d\tau + \int_{T'} \left(\frac{\partial V_1}{\partial x} \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial V_1}{\partial y} \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial V_1}{\partial z} \frac{\partial V}{\partial z} \right) d\tau$$
$$= \int_{\Sigma} V_1 \frac{dV}{dn} \, d\sigma + \int_{S} V_1 \frac{dV}{dn_i} \, d\sigma.$$

La normale extérieure au volume T′ est la normale intérieure à T; c'est pour cela que nous écrivons $\frac{dV}{dn_i}$.

Étudions l'intégrale du second membre, relative à Σ, quand le rayon R de la sphère grandit indéfiniment. V_1 est de l'ordre de $\frac{1}{R}$; $\frac{dV}{dn} = \frac{dV}{dR}$ est de l'ordre de $\frac{1}{R^2}$, enfin $d\sigma = R^2 \, d\omega$, $d\omega$ désignant l'élément de surface correspondant à $d\sigma$ sur la sphère de rayon 1. On reconnaît que l'intégrale est de l'ordre de $\frac{1}{R}$ et tend vers zéro quand R augmente indéfiniment.

Appliquons maintenant la formule de Green à la surface S et au volume T :

$$\int_{T} V_1 \Delta V \, d\tau + \int_{T} \left(\frac{\partial V_1}{\partial x} \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial V_1}{\partial y} \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial V_1}{\partial z} \frac{\partial V}{\partial z} \right) d\tau = \int_{S} V_1 \frac{dV}{dn_e} \, d\sigma.$$

Ajoutons les deux équations; il vient, pour l'espace entier,

$$\int V_1 \Delta V \, d\tau + \int \left(\frac{\partial V_1}{\partial x} \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial V_1}{\partial y} \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial V_1}{\partial z} \frac{\partial V}{\partial z} \right) d\tau = 0,$$

car $\frac{dV}{dn_i} = -\frac{dV}{dn_e}$, en tout point de S.

Cette relation peut s'écrire, en étendant l'intégrale à tout l'espace,

$$(12) \quad -4\pi \int V_1 \rho \, d\tau + \int \left(\frac{\partial V_1}{\partial x} \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial V_1}{\partial y} \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial V_1}{\partial z} \frac{\partial V}{\partial z} \right) d\tau = 0.$$

1° Cette formule nous permet de démontrer que *les propriétés reconnues du potentiel sont caractéristiques.*

Soit, en effet, une masse attirante de potentiel U, et soit U′ une autre fonction possédant les propriétés analytiques de U. Je pose $V = U - U'$; cette nouvelle fonction V possède également les propriétés du potentiel. Elle est continue et finie, elle admet

des dérivées premières continues, ses dérivées secondes sont discontinues et $\Delta V = 0$ dans tout l'espace.

Appliquons la formule de Poincaré en faisant d'abord $V_1 = V$ et en prenant pour V la valeur $U - U'$; on a

$$(13) \qquad \int V \Delta V \, d\tau + \int \left[\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2 \right] d\tau = 0,$$

les intégrales étant étendues à tout l'espace. Or ΔV est nul partout, la seconde intégrale est donc aussi identiquement nulle partout, ce qui exige $\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial y} = \frac{\partial V}{\partial z} = 0$, c'est-à-dire V constant et, comme V est nul à l'infini, V est nul dans tout l'espace et U' est identique à U.

2° En permutant V et V_1 dans la formule de Poincaré, il vient, en retranchant les deux équations ainsi obtenues,

$$(14) \qquad \int (V_1 \Delta V - V \Delta V_1) \, d\tau = 0 \qquad \text{ou} \qquad \int (\rho V_1 - \rho_1 V) \, d\tau = 0.$$

Mais ρ est nul partout à l'extérieur de T, et ρ_1 nul partout à l'extérieur de T_1; on peut donc écrire la formule précédente

$$(15) \qquad \int_T \rho V_1 \, d\tau = \int_{T_1} \rho_1 V \, d\tau.$$

Nous utiliserons ce résultat dans l'étude de l'énergie potentielle d'un corps attirant.

9. **Forme des surfaces équipotentielles.** — Si l'on fait $V = C$, on obtient certaines surfaces dites *équipotentielles*. La force est, en chaque point, normale à la surface equipotentielle qui passe par ce point et elle est dirigée du côté des potentiels croissants.

Ces surfaces peuvent se classer en trois espèces :

1° Si C est très petit, l'équation d'une surface équipotentielle peut se mettre sous la forme $\frac{R^2}{K} + \frac{M}{R^2} = C$, en appelant R la distance à un point intérieur du volume attirant. Pour R très grand, cette surface est voisine d'une sphère de centre O. Il y a donc des surfaces équipotentielles fermées entièrement *extérieures* aux masses attirantes et les enveloppant.

2° Il y a en général un maximum à l'intérieur des masses attirantes. Pour une valeur de C assez voisine de ce maximum, on obtient des surfaces complètement *intérieures* au corps attirant.

3° Enfin, pour des valeurs intermédiaires, on pourra trouver des surfaces équipotentielles situées en partie à l'intérieur, en partie à l'extérieur du corps attirant.

10. **Potentiel de quelques corps attirants.** — 1° *Sphère homogène.* — Soient a son rayon et ρ sa densité. Pour le potentiel extérieur, on a immédiatement

$$(16) \qquad r > a, \qquad V = \frac{M}{R} = \frac{4}{3}\frac{\pi a^3 \rho}{r}.$$

Pour obtenir le potentiel intérieur, décomposons la sphère en deux parties dont l'une est la sphère de rayon r, sur laquelle se trouve le point considéré. L'attraction sur P de la couche extérieure est nulle. L'attraction de la sphère de rayon r est la même que si toute la masse était concentrée au centre

$$(17) \qquad r < a, \qquad F = -f\frac{4}{3}\frac{\pi r^3 \rho}{r^2} = -\frac{4}{3}\pi f \rho r.$$

Le travail de l'attraction pour un déplacement élémentaire de P est

$$F\,dr = -\frac{4}{3}\pi f \rho r\,dr = f\,dV, \qquad V = -\frac{2}{3}\pi \rho r^2 + C.$$

Pour déterminer la constante C, on peut écrire que les deux valeurs du potentiel extérieur et intérieur deviennent égales sur la surface. Pour $r = a$, on a donc

$$(18) \quad \frac{4}{3}\pi a^2 \rho = -\frac{2}{3}\pi \rho a^2 + C, \qquad C = 2\pi a^2 \rho, \qquad V = 2\pi a^2 \rho - \frac{2}{3}\pi r^2 \rho.$$

On peut faire un certain nombre de *remarques* sur ce cas particulier :

a. Il n'y a pas de surfaces équipotentielles de la troisième catégorie ;

b. V est maximum au centre où sa valeur est $2\pi a^2 \rho$;

c. La surface libre est une surface équipotentielle.

Nous voyons sur cet exemple que l'expression analytique du

potentiel n'est pas la même à l'intérieur et à l'extérieur de la sphère. Ces deux expressions ne sont pas le prolongement analytique l'une de l'autre.

2° *Ellipsoïde homogène.* — L'attraction des ellipsoïdes a fait l'objet de très nombreux travaux. Lejeune-Dirichlet, en exposant sa méthode dans le Tome 32 du *Journal de Crelle*, résume tout ce qui a été fait sur la question. C'est une méthode de vérification. On écrit une certaine expression analytique pour l'intérieur et pour l'extérieur, et l'on montre que ces fonctions jouissent des propriétés caractéristiques du potentiel, qu'elles sont bien le potentiel.

Soient un ellipsoïde à trois axes inégaux, X, Y, Z les coordonnées d'un point de la surface, et x, y, z celles d'un *point extérieur* P; on aura

$$\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}+\frac{Z^2}{c^2}-1=0 \qquad \text{et} \qquad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1>0.$$

Considérons maintenant l'équation suivante :

$$\frac{x^2}{a^2+u}+\frac{y^2}{b^2+u}+\frac{z^2}{c^2+u}-1=0. \tag{19}$$

Le premier membre est positif pour $u=0$, décroît constamment quand u augmente, et devient égal à -1 pour u infini. L'équation admet donc une et une seule racine positive. Soit u cette racine; le potentiel à l'extérieur a pour expression

$$V=\pi abc\rho\int_a^\infty\left(1-\frac{x^2}{a^2+\lambda}-\frac{y^2}{b^2+\lambda}-\frac{z^2}{c^2+\lambda}\right)\frac{d\lambda}{\sqrt{\varphi(\lambda)}}, \tag{20}$$

où l'on pose

$$\varphi(\lambda)=(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda); \tag{21}$$

u dépend de x, y, z. Ainsi V dépend de x, y, z de deux façons : par la quantité sous le signe *somme*, et par la limite inférieure de l'intégrale.

Pour un *point intérieur* x, y, z, on aura

$$V=\pi abc\rho\int_0^\infty\left(1-\frac{x^2}{a^2+\lambda}-\frac{y^2}{b^2+\lambda}-\frac{z^2}{c^2+\lambda}\right)\frac{d\lambda}{\sqrt{\varphi(\lambda)}}. \tag{22}$$

Sur la surface, la racine u est nulle. Les deux fonctions considérées se raccordent donc sur la surface.

Ces fonctions V ont bien les propriétés du potentiel. En effet :

1° Ces fonctions sont *finies* et *continues*. Si P s'éloigne indéfiniment de façon que OP tende vers une direction fixe α, β, γ, V tend vers zéro comme $\frac{1}{R}$. En effet, posons

$$x = \alpha R, \qquad y = \beta R, \qquad z = \gamma R, \qquad u = kR^2.$$

L'équation de condition deviendra

$$\frac{\alpha^2 R^2}{a^2 + kR^2} + \frac{\beta^2 R^2}{b^2 + kR^2} + \frac{\gamma^2 R^2}{c^2 + kR^2} - 1 = 0.$$

Cette équation a une racine positive en k, dès que P est extérieur à l'ellipsoïde. Si R augmente indéfiniment, cette expression devient

$$\frac{\alpha^2}{k} + \frac{\beta^2}{k} + \frac{\gamma^2}{k} - 1 = 0, \qquad \text{d'où} \qquad k = 1.$$

Ainsi, quand R augmente indéfiniment, la limite de $\frac{u}{R^2}$ est 1, u devient infini comme R^2, et l'intégrale devient nulle de l'ordre $\frac{1}{R}$.

2° *Les dérivées premières sont continues, et* $\Delta V = -4\pi\rho$ *dans tout l'espace,* ρ *étant nul à l'extérieur de l'ellipsoïde.* La vérification se fait par un calcul qu'on trouvera dans le Tome III de ce Traité, n° 602, Chapitre XXIX.

Surfaces équipotentielles de l'ellipsoïde homogène. — Posons

$$K = \int_0^\infty \frac{d\lambda}{\sqrt{\varphi(\lambda)}},$$

$$A = \int_0^\infty \frac{d\lambda}{(a^2+\lambda)\sqrt{\varphi(\lambda)}}, \quad B = \int_0^\infty \frac{d\lambda}{(b^2+\lambda)\sqrt{\varphi(\lambda)}}, \quad C = \int_0^\infty \frac{d\lambda}{(c^2+\lambda)\sqrt{\varphi(\lambda)}}.$$

Le potentiel à l'intérieur s'écrira

$$V = \pi abc\rho(K - Ax^2 - By^2 + Cz^2). \tag{23}$$

Il est maximum au centre et égal à $\pi abc\rho K$.

Les surfaces équipotentielles sont données par l'équation

$$(24)\quad K - Ax^2 - By^2 - Cz^2 = h \quad \text{ou} \quad Ax^2 + By^2 + Cz^2 = K - h = \mu;$$

tant que la valeur de h est suffisamment voisine de K, l'ellipsoïde ainsi défini reste à l'intérieur de l'ellipsoïde attirant, et les surfaces équipotentielles sont des ellipsoïdes homothétiques et concentriques.

Comparons ces surfaces à l'ellipsoïde attirant en supposant $c < b < a$; on a

$$\frac{1}{a^2+\lambda} < \frac{1}{b^2+\lambda} < \frac{1}{c^2+\lambda}$$

pour toutes les valeurs de λ. On a donc, entre les intégrales A, B, C, les relations

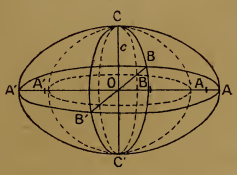
$$A < B < C.$$

Écrivons l'ellipsoïde de potentiel constant; on a

$$\frac{x^2}{a'^2} + \frac{y^2}{b'^2} + \frac{z^2}{c'^2} - 1 = 0, \qquad a' = \sqrt{\frac{\mu}{A}}, \qquad \ldots, \qquad c' < b' < a';$$

ainsi, les ellipsoïdes sont allongés dans le même sens que l'ellipsoïde attirant.

Fig. 9.



Mais leur excentricité est moindre, ils sont moins aplatis. En effet, formons la combinaison

$$A a^2 - B b^2 = \int_0^\infty \left(\frac{a^2}{a^2+\lambda} - \frac{b^2}{b^2+\lambda}\right) \frac{d\lambda}{\sqrt{\varphi(\lambda)}}$$
$$= (a^2 - b^2) \int_0^\infty \frac{\lambda\, d\lambda}{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)\sqrt{\varphi(\lambda)}}.$$

Cette expression est positive; on a donc bien

$$A a^2 - B b^2 > 0, \qquad \frac{a^2}{a'^2} > \frac{b^2}{b'^2} \qquad \text{ou} \qquad \frac{a'}{a} < \frac{b'}{b} < \frac{c'}{c}.$$

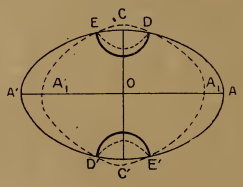
Supposons que l'ellipsoïde de niveau grandisse en restant homothétique, c'est-à-dire que la constante h partant de la valeur maximum K diminue. Au moment où les deux ellipsoïdes deviennent tangents, on a (*fig.* 9)

$$\sqrt{\frac{\mu}{C}} = c' = c, \qquad h = K - \mu = K - Cc^2 \qquad \text{et} \qquad \frac{a'}{a} < \frac{b'}{b} < 1.$$

Donc l'ellipsoïde de niveau, d'abord constamment intérieur au volume attirant, lui devient tangent aux deux extrémités du petit axe c au moment où $c' = c$, mais reste entièrement à son intérieur.

Faisons décroître encore h. La surface équipotentielle se compose alors de deux portions de surface : une portion d'ellipsoïde à l'intérieur, et une autre surface à l'extérieur (*fig.* 10). Mais, le

Fig. 10.



long de la courbe d'intersection de l'ellipsoïde attirant et de la surface de niveau, les surfaces extérieures et intérieures se raccordent, car elles ont même plan tangent. Les éléments de courbure, au contraire, sont discontinus, car ils dépendent des dérivées secondes.

Au moment où $b' = b$, on a encore $\frac{a'}{a} < 1$. La surface de niveau

Fig. 11.

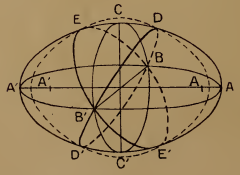
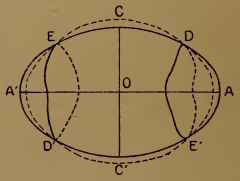


Fig. 12.



est tangente à l'ellipsoïde attirant aux extrémités de l'axe moyen.

L'intersection se compose de deux courbes planes. L'ellipsoïde défini par l'équation n'est une surface de niveau que pour ceux de ses points qui sont intérieurs au volume attirant (*fig.* 11 et 12).

Enfin, si $a' = a$, l'ellipsoïde en question est bitangent aux extrémités du grand axe à l'ellipsoïde attirant. Tous ses points sont donc extérieurs au volume attirant. Ce n'est plus une surface équipotentielle.

Ainsi, à la surface de l'ellipsoïde, le potentiel est maximum au sommet du petit axe et minimum au sommet du grand axe.

3° *Ellipsoïde de révolution.* — Les formules se simplifient beaucoup. Supposons, par exemple, $a = b$, ellipsoïde de révolution aplati autour de Gz. Le potentiel intérieur est

$$(25) \qquad V = \pi a^2 c \rho \int_0^\infty \left(1 - \frac{x^2 + y^2}{a^2 + \lambda} - \frac{z^2}{c^2 + \lambda^2}\right) \frac{d\lambda}{(a^2 + \lambda)\sqrt{c^2 + \lambda}}.$$

Les intégrales ne sont plus elliptiques et l'intégration se fait par les méthodes élémentaires. On trouvera leurs expressions, pour l'ellipsoïde aplati, dans le Tome III, n° 603.

11. Énergie potentielle d'un système de corps attirants. — 1° Soit d'abord un système de *masses attirantes isolées.* Appelons $m_1, m_2, \ldots, m_i, m_k, \ldots$ ces masses, et r_{ik} la distance des points m_i et m_k; on a $r_{ik} = r_{ki}$. Désignons par F_{ik} l'action mutuelle de m_i et m_k, ou la force avec laquelle ces points agissent l'un sur l'autre ; on a

$$F_{ik} = -f \frac{m_i m_k}{r_{ik}^2}.$$

Cherchons la somme des travaux élémentaires de ces forces pour un déplacement infiniment petit du système. Le travail de l'action mutuelle du couple de points $m_i m_k$ et de l'ensemble de ces actions mutuelles est

$$F_{ik}\, dr_{ik} = -f \frac{m_i m_k}{r_{ik}^2} dr_{ik}, \qquad \Sigma \mathfrak{T}_e = -f \sum \frac{m_i m_k}{r_{ik}^2} dr_{ik}.$$

C'est une différentielle totale, comme il arrive toujours dans le cas

de forces centrales fonctions de la distance. Nous posons

$$(26)\qquad \Sigma\mathfrak{T}_e = f\,dW, \qquad W = \sum \frac{m_i m_k}{r_{ik}}.$$

Cette fonction W s'appelle *énergie potentielle du système.*

La signification physique de W est simple. Si les points passent d'une configuration initiale $m_1^0, m_2^0, \ldots, m_i^0, m_k^0, \ldots$ à la position actuelle envisagée, où l'énergie potentielle est W, le travail total des forces d'attraction pour passer de la configuration initiale, dont l'énergie potentielle est W_0, à la configuration actuelle, est

$$(27)\qquad \int \Sigma\mathfrak{T}_e = f(W - W_0).$$

Si maintenant on considère une configuration initiale, telle que les distances des points $m_1, m_2, \ldots, m_p$, pris deux à deux, soient toutes infiniment grandes, W_0 est nul et W représente le travail total des forces, quand les masses arrivent à la configuration actuelle à partir d'une position où elles n'exerçaient aucune action les unes sur les autres.

Nous allons transformer cette expression de W. On obtiendrait cette transformation en remarquant que W est une forme quadratique par rapport aux masses, et en appliquant le théorème des fonctions homogènes

$$2f(x, y, z, \ldots) = xf'_x + yf'_y + zf'_z + \ldots.$$

Écrivons

$$W = \frac{1}{2} m_1 \left(\frac{m_2}{r_{12}} + \frac{m_3}{r_{13}} + \ldots + \frac{m_p}{r_{1p}}\right) + \frac{1}{2} m_2 \left(\frac{m_1}{r_{21}} + \frac{m_3}{r_{23}} + \ldots + \frac{m_p}{r_{2p}}\right) + \ldots$$
$$+ \frac{1}{2} m_p \left(\frac{m_1}{r_{p1}} + \frac{m_2}{r_{p2}} + \ldots + \frac{m_{p-1}}{r_{p(p-1)}}\right),$$

nous avons bien l'expression de W déjà donnée, car

$$\frac{1}{2} m_1 \frac{m_2}{r_{12}} + \frac{1}{2} m_2 \frac{m_1}{r_{21}} = \frac{m_1 m_2}{r_{12}}.$$

Soient U_1 le potentiel en m_1 dû aux masses attirantes autres que m_1, U_2 le potentiel en m_2 dû aux masses attirantes autres que $m_2, \ldots$; on a

$$(28)\qquad \begin{cases} U_1 = \dfrac{m_2}{r_{12}} + \dfrac{m_3}{r_{13}} + \ldots + \dfrac{m_p}{r_{1p}}, \\ W = \dfrac{1}{2}(m_1 U_1 + m_2 U_2 + \ldots + m_p U_p) = \dfrac{1}{2} \Sigma m_k U_k. \end{cases}$$

2° *Système continu de masses attirantes.* — Soient T le volume d'un corps attirant et ρ la densité variable en chaque point de ce corps attirant. Considérons un élément infiniment petit $d\tau$ de ce volume; en ce point, la densité est ρ et l'élément de masse $dm = \rho\, d\tau$. Désignons par V la valeur du potentiel en M, centre de gravité de l'élément $d\tau$. Ce potentiel diffère infiniment peu du potentiel en M dû au corps dont on aurait retiré l'élément dm. On a donc pour l'énergie totale

$$(29) \qquad W = \frac{1}{2}\int_T V\, dm = \frac{1}{2}\int_T \rho V\, d\tau,$$

l'intégrale étant étendue au volume attirant. On peut dire aussi que l'intégrale est étendue à tout l'espace, puisque la densité est nulle en dehors du corps.

On a également en tout point de l'espace, même en dehors du corps,

$$(30) \qquad \Delta V = -4\pi\rho, \qquad W = -\frac{1}{8\pi}\int V\,\Delta V\, d\tau;$$

mais on a, d'après (13),

$$(31) \qquad W = \frac{1}{8\pi}\int\left[\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2\right] d\tau.$$

Ici, l'intégrale est étendue à tout l'espace. Les dérivées premières de V sont, à un facteur près, les projections de la force attirante qui existe dans tout l'espace.

On peut d'ailleurs écrire, en introduisant cette force,

$$(32) \qquad F^2 = \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2, \qquad W = \frac{1}{8\pi}\int F^2\, d\tau.$$

Calculons, par exemple, l'énergie potentielle d'une *sphère attirante* de rayon a; nous mettrons en évidence les dimensions de l'énergie. On a

$$W = \frac{1}{2}\rho\int V\, d\tau, \qquad V = 2\pi a^2\rho - \frac{2}{3}\pi r^2\rho.$$

Puisque V ne dépend que de r, on peut prendre pour élément de volume le volume compris entre deux sphères concentriques de

rayons r et $r + dr$ ayant même centre que la sphère considérée

$$d\tau = 4\pi r^2\, dr, \qquad W = 4\pi^2\rho^2\left[\int_0^a a^2 r^2\, dr - \frac{1}{3}\int_0^a r^4\, dr\right] = \frac{16}{15}\pi^2\rho^2 a^5.$$

Ainsi l'énergie est de dimension 2 par rapport à la densité, de dimension 5 par rapport aux longueurs.

On peut aussi calculer W en partant de l'expression en fonction de la force F. Il faut alors décomposer l'intégration en deux, car F n'a pas la même expression analytique à l'intérieur et à l'extérieur de la sphère

$$F_i = \frac{4}{3}\pi\rho\, r, \qquad F_e = \frac{4}{3}\pi\rho\frac{a^3}{r^2}.$$

Le calcul de W peut aussi se faire dans le cas d'un *ellipsoïde* homogène pour un point intérieur

$$(33)\quad \begin{cases} V = \pi abc\rho(K - Ax^2 - By^2 - Cz^2), \\ W = \frac{1}{2}\rho\int V\, d\tau \\ \quad = \frac{1}{2}\pi\rho^2 abc\left[K\int d\tau - A\int x^2\, d\tau - B\int y^2\, d\tau - C\int z^2\, d\tau\right]. \end{cases}$$

Le coefficient de K, c'est le volume de l'ellipsoïde; les coefficients de A, B, C sont les moments d'inertie de l'ellipsoïde supposé de densité 1 par rapport aux trois plans de coordonnées.

Énergie relative de deux corps différents, ou encore *Énergie mutuelle* ou *Énergie potentielle réciproque*. — Considérons deux corps T_1 et T_2, à l'intérieur desquels la densité est respectivement ρ_1 et ρ_2. Cherchons l'énergie totale de ce système.

Soient V_1 le potentiel dû au corps T_1 et V_2 le potentiel dû au corps T_2. Le potentiel total en un point quelconque sera

$$V = V_1 + V_2$$

et l'énergie totale

$$(34)\quad \begin{cases} W = \frac{1}{2}\int_{T_1+T_2}\rho V\, d\tau \\ \quad = \frac{1}{2}\int_{T_1}\rho_1 V_1\, d\tau + \frac{1}{2}\int_{T_2}\rho_2 V_2\, d\tau + \frac{1}{2}\int_{T_1}\rho_1 V_2\, d\tau + \frac{1}{2}\int_{T_2}\rho_2 V_1\, d\tau, \\ W = W_1 + W_2 + W_{12}. \end{cases}$$

W_1 est l'énergie potentielle du corps T_1 considéré isolément, W_2 celle de T_2; W_{12} désigne le groupe des deux dernières intégrales que nous appellerons l'*énergie relative des deux corps*. C'est la partie de l'énergie totale du système que l'on obtient en associant un élément m_i de T_1 avec un élément m_k de T_2, c'est-à-dire, symboliquement,

$$W_{12} = \sum \frac{m_i m_k}{r_{ik}}.$$

Or, on a vu (p. 23) que

$$\int_{T_1} \rho_1 V_2 \, d\tau = \int_{T_2} \rho_2 V_1 \, d\tau, \tag{35}$$

d'où

$$W_{12} = \int_{T_1} \rho_1 V_2 \, d\tau = \int_{T_2} \rho_2 V_1 \, d\tau. \tag{36}$$

Le calcul de l'énergie relative de deux sphères homogènes extérieures l'une à l'autre est très simple. En appelant O_1 et O_2 les centres, M_1 et M_2 les masses des deux sphères, on obtient

$$W_{12} = \frac{M_1 M_2}{O_1 O_2}.$$

Cela provient de ce que la sphère, au point de vue de son attraction, peut être remplacée par une masse égale placée en son centre.

Le calcul de l'énergie relative de deux ellipsoïdes homogènes a été fait par Laguerre (*Œuvres*, t. I, p. 455; ou *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. CII, 1886). Les résultats seuls sont donnés; Laguerre recourt aux imaginaires par une méthode assez obscure. Cette méthode demanderait à être éclaircie par de nouvelles recherches.

12. **Problèmes de maximum.** — Nous avons étudié l'attraction, le potentiel et l'énergie d'une masse attirante; à ces trois objets se rattachent trois problèmes de maximum, dont nous allons étudier les solutions.

1° *Solide de plus grande attraction.* — Étant donnée une masse homogène de densité ρ et de volume T, et un point P,

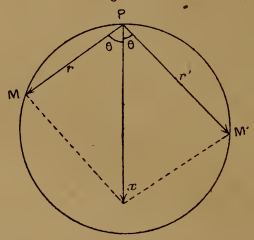
comment faut-il disposer cette masse, quelle forme lui donner et où la mettre pour que l'attraction sur P soit maximum ?

a. P doit être sur la surface, car, s'il était à l'extérieur, en rapprochant la masse on augmenterait l'attraction; s'il était à l'intérieur, on augmenterait encore l'attraction en reportant dans la direction de la résultante la partie de la masse située à l'opposé par rapport à P.

b. Quelle doit être la forme de cette surface ? Voici un raisonnement de Joseph Bertrand basé sur l'intuition, mais peu rigoureux (*Traité de Calcul différentiel et intégral*, t. II). Tisserand a donné une solution rigoureuse dans sa *Mécanique céleste*, t. II.

Soit donc un point P sur la surface du solide de plus grande

Fig. 13.



attraction. Soit Px la résultante générale de l'attraction de tous les éléments sur P (*fig.* 13).

Soit M un élément de masse m de la surface. L'attraction de M sur P et la projection de cette force sur Px sont

$$F = -f\frac{m\mu}{r^2}, \qquad F_x = -f\frac{m\mu}{r^2}\cos\theta.$$

Soient maintenant M′ un autre élément de la surface et m sa masse, égale à la première, r' et θ' la distance PM′ et l'angle M′Px; on a de même

$$F'_x = -f\frac{m\mu}{r'^2}\cos\theta'.$$

Ces deux composantes doivent être égales, car si $F'_x > F_x$, j'aug-

menterais l'attraction en transportant la masse m de M en M'. (C'est ici que le raisonnement n'est pas rigoureux; car, en transportant cette masse M, on change aussi la direction de l'x.)

Ainsi, pour qu'on ne puisse pas augmenter l'attraction par des déplacements de masses, il faut que toutes les composantes telles que F_x soient égales, c'est-à-dire qu'il faut avoir sur la surface libre

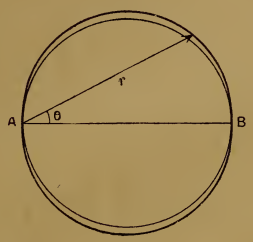
$$\frac{\cos\theta}{r^2} = K.$$

Le solide de plus grande attraction est donc limité par une surface de révolution dont la méridienne a pour équation la relation ci-dessus. Pour obtenir la forme de la courbe, on peut faire $K = 1$ et l'on a

$$r^2 = \cos\theta.$$

Cette courbe est extérieure au cercle $r_1 = \cos\theta$ et en diffère peu.

Fig. 14.



La direction de l'attraction est précisément l'axe de révolution pour le point A où l'attraction est maximum (*fig.* 14).

2° *Maximum de potentiel.* — On se donne ρ, P et T; il s'agit de disposer la masse attirante de telle sorte que le potentiel soit maximum en P. Or, on a

$$V = \sum \frac{m}{r}.$$

Si l'on diminue les distances r, V augmente. P ne peut pas être extérieur. Je dis que P doit être à égale distance de tous les points de la surface. En effet, soient M et M' deux éléments de même

masse m situés sur la surface, r et r' étant leurs distances à P avec $r < r'$. On augmentera la valeur du potentiel en P en transportant la masse m située en M′ à côté du point M.

Ainsi le potentiel sera maximum quand on disposera la masse attirante suivant une sphère homogène de centre P. Si T et ρ sont donnés, on en déduit le rayon a de la sphère et le potentiel maximum au moyen des formules

$$T = \frac{4}{3}\pi a^3, \qquad V = 2\pi a^2 \rho.$$

3° *Maximum d'énergie.* — On se donne une masse homogène de densité ρ, de volume T; il faut disposer la masse de façon que l'énergie soit maximum.

a. Il faut montrer d'abord que l'énergie est limitée supérieurement. Donnons au corps une forme quelconque, on a

$$W = \frac{1}{2}\int_T \rho V \, d\tau.$$

Considérons d'autre part la sphère de même volume T et de rayon a; on a vu que, dans ce cas, le potentiel a pour maximum celui de la sphère en son centre. On a donc partout

$$V \leqq 2\pi a^2 \rho.$$

Dans l'expression de l'énergie, en remplaçant V en chaque point par son maximum absolu, on aura une limite supérieure de W :

$$W < \pi a^2 \rho^2 \int d\tau, \qquad W < \pi a^2 \rho^2 T,$$

et, en remplaçant le volume T par sa valeur actuelle,

$$W < \frac{4}{3}\pi a^5 \rho^2. \tag{37}$$

Ainsi l'énergie potentielle d'un corps quelconque de volume T, même pour la sphère de même volume, est inférieure à cette limite.

L'énergie est limitée supérieurement. Elle a un *maximum maximorum*. A-t-elle un minimum? Non, car en allongeant le

corps indéfiniment, on peut diminuer son énergie autant qu'on le veut.

b. Il y a un maximum maximorum et peut-être des maxima relatifs. Quelles sont les formes telles que l'énergie du corps passe par un maximum ?

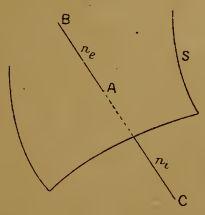
Liapounoff a démontré en toute rigueur (*voir* Poincaré, *Figures d'équilibre d'une masse fluide*, p. 15) que la sphère donne le maximum absolu d'énergie. Mais on peut se demander s'il ne peut pas exister d'autres figures pour lesquelles W passe par un maximum relatif, ou s'il n'existe pas de figures pour lesquelles δW soit nul sans qu'il y ait maximum, car $\delta W = 0$ est une condition nécessaire et non suffisante du maximum. Ce sont là des recherches intéressantes à entreprendre. Il est probable, toutefois, qu'il n'existe pas d'autres figures que la sphère où l'énergie soit maximum.

13. **Attraction des surfaces. Simples couches.** — Prenons une surface limitée S, fermée ou non. C'est une surface matérielle d'épaisseur infiniment petite. Un élément $d\sigma$ de la surface aura une masse dm. On appelle *densité superficielle* μ le rapport

$$\frac{dm}{d\sigma}, \quad \text{d'où} \quad dm = \mu\, d\sigma.$$

μ est une fonction des coordonnées a, b, c de $d\sigma$ parfaitement

Fig. 15.



déterminée en chaque point. Elle peut être toutefois discontinue quand $d\sigma$ traverse certaines lignes de la surface.

Le potentiel V est une fonction de x, y, z

$$V = \sum \frac{m}{r} = \int_S \frac{dm}{r} = \int_L \frac{\mu\, d\sigma}{r}.$$

V est fini et continu dans tout l'espace, même quand on traverse la surface. A l'infini, V devient nul de l'ordre de $\frac{1}{R}$. Mais les dérivées sont discontinues quand on traverse la surface. En effet, désignons par n_e et n_i les deux normales intérieure et extérieure en un point A de la surface; on a, en prenant deux points infiniment voisins de part et d'autre de la surface S (*fig.* 15),

$$\frac{dV}{dn_e} + \frac{dV}{dn_i} = -4\pi\mu. \tag{38}$$

Mais le potentiel reste continu, car on a

$$V_B = V_A + \frac{dV}{dn_e}\overline{AB}, \qquad V_C - V + \frac{dV}{dn_i}\overline{AC};$$

comme AB et AC sont infiniment petits, V_B et C_C diffèrent infiniment peu de V_A.

Considérons, par exemple, une enveloppe sphérique de densité constante. On a, pour le potentiel à l'extérieur et à l'intérieur,

$$V_e = \frac{4\pi a^2\mu}{r}, \qquad V_i = C.$$

Ces deux valeurs se raccordent à la surface, ce qui donne

$$C = 4\pi a\mu.$$

Prenons les dérivées suivant la normale, on aura en un point de la surface, suivant qu'on se déplace vers l'intérieur ou vers l'extérieur, les valeurs discontinues

$$\frac{dV}{dn_i} = 0, \qquad \frac{dV}{dn_e} = \frac{dV}{dr} = -\frac{4\pi a^2\mu}{r^2},$$

c'est-à-dire pour $r = a$

$$\frac{dV}{dn} = -4\pi\mu.$$

Nous avons supposé l'épaisseur de la couche attirante rigoureu-

sement nulle. Il nous arrivera aussi de considérer une couche infiniment mince, constituée par une masse attirante comprise entre deux surfaces infiniment voisines. Les mêmes formules s'y appliquent, ε étant la longueur de la normale à l'une de ces surfaces, comprise entre les deux; on a

$$dm = \varepsilon\rho\, d\sigma, \qquad V = \int \frac{\varepsilon\rho\, d\sigma}{r}.$$

On peut d'ailleurs supposer ρ constant en faisant varier convenablement ε. Si l'on considère les dérivées prises suivant les normales à partir de chaque face, en A et en A', on a encore

$$\frac{dV}{dn_e} + \frac{dV}{dn_i} = -4\pi\mu, \qquad \mu = \varepsilon\rho.$$

Nous avons affaire ici à un potentiel de volume attirant et il n'y a aucune contradiction entre ces résultats et les précédents. Nous prenons en effet les dérivées suivant les normales en deux points différents A et A'. Les dérivées partielles sont bien continues, mais elles varient extrêmement vite quand on traverse la couche attirante extrêmement mince.

CHAPITRE III.

ELLIPSOÏDES DE MACLAURIN ET DE JACOBI.

14. **Masse sans mouvement de rotation.** — Le premier problème que nous poserons sera de déterminer la forme d'une masse fluide dont les éléments s'attirent, suivant la loi de Newton, et sont tous immobiles.

Prenons donc un liquide de densité $\rho = \text{const.}$ Soit S la surface libre. Supposons que l'équilibre existe, et considérons un élément μ de masse égale à 1. Écrivons les équations de l'équilibre hydrostatique. Nous aurons d'abord les projections de la force F rapportée à l'unité de masse

$$(39) \qquad X = f\frac{\partial V}{\partial x}, \qquad Y = f\frac{\partial V}{\partial y}, \qquad Z = f\frac{\partial V}{\partial z}.$$

Si nous considérons le système comme isolé, la pression périphérique p sera nulle en chaque point et l'équation d'équilibre sera

$$\frac{dp}{\rho} = f\,dV, \qquad \frac{p}{\rho} = fV + C.$$

Sur S on a $p = 0$, donc $fV + C = 0$. Donc S est une *surface équipotentielle*. On pouvait d'ailleurs le prévoir *a priori*, car l'attraction sur chaque molécule périphérique est normale à la surface puisqu'il y a équilibre, et, par conséquent, en se déplaçant sur la surface, on doit avoir $dp = 0$, $p = \text{const.}$

Le problème revient donc à disposer le liquide de façon que sa surface libre soit une surface de niveau.

On arrive aux mêmes résultats en supposant constante et non nulle la pression à la surface (cas d'un fluide plongé dans une atmosphère). La surface libre serait alors $p_0 = fV + C$, d'où $V = \text{const.}$

Il y a une forme évidente d'équilibre : c'est la sphère. Dans ce cas, l'attraction est normale à la surface en chaque point, et la surface est bien une surface équipotentielle.

Il est aisé de faire le calcul. Supposons $p_0 = 0$. A l'intérieur, on a

$$V = 2\pi a^2 \rho - \frac{2}{3}\pi r^2 \rho, \qquad \frac{p}{\rho} = f\left(2\pi a^2 - \frac{2}{3}\pi r^2\right) + C;$$

à la surface la pression est nulle, ce qui permet de déterminer la constante

$$0 = f\left(2\pi a^2 \rho - \frac{2}{3}\pi a^2 \rho\right) + C, \qquad \text{d'où} \qquad \frac{p}{\rho} = \frac{2}{3}\pi f \rho (a^2 - r^2).$$

p augmente quand r diminue et la pression est maximum au centre où

$$(40) \qquad p_c = \frac{2}{3}\pi f \rho^2 a^2.$$

On peut se faire une idée de la pression énorme au centre de la Terre, supposée immobile, liquide et homogène. On a pour la densité moyenne 5,5; pour le rayon terrestre moyen, 6366^{km}; enfin, pour évaluer f, on peut considérer la Terre comme sphérique et désignant par g l'accélération à la surface

$$g = f\frac{M}{r^2} = f\frac{4}{3}\frac{\pi a^3 \rho}{a^2} = \frac{4}{3}\pi f a \rho,$$

d'où

$$p_c = \frac{1}{2} g \rho a = \frac{1}{2} 981 \times 5,5 \times 6,366 \times 10^8 \frac{\text{dynes}}{\text{cm}^2}$$
$$= 1,72 \times 10^{12} \frac{\text{dynes}}{\text{cm}^2} = 1,7 \times 10^6 \text{ atm}.$$

La sphère est donc une solution du problème. N'y en a-t-il pas d'autres ? C'est probable, mais ce n'est pas rigoureusement démontré. Il faudrait pour cela démontrer qu'une masse homogène immobile, telle que la surface libre soit une surface équipotentielle, est nécessairement une sphère.

Liapounoff a étudié le problème à un autre point de vue. Considérons des forces appliquées à un système, et supposons que ces forces dépendent d'une fonction de forces

$$(41) \qquad \Sigma(X\,\delta x + Y\,\delta y + Z\,\delta z) = \delta\, U(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \ldots).$$

Les positions d'équilibre sont celles pour lesquelles la somme des travaux des forces appliquées est nulle pour tout déplacement compatible avec les liaisons. Alors $\delta U = 0$. D'ailleurs, si $\delta U = 0$, il n'y a pas nécessairement équilibre, autrement dit la condition n'est pas réciproque.

Dirichlet a montré que, pour qu'un équilibre soit stable, il suffit que U soit maximum dans cette position. Si $\delta U = 0$ sans que U soit maximum, l'équilibre est instable, comme il résulte de travaux récents (t. II, n° 449, 3e édit.). Dans l'étude du problème considéré, les pressions sont des forces de liaison, et les seules forces à considérer sont les attractions. Ces forces d'attraction dérivent d'une fonction de forces

$$(42) \qquad U = fW, \qquad W = \sum \frac{m_i m_k}{r_{ik}}.$$

Pour trouver les positions d'équilibre, il faut encore $\delta U = 0$, donc $\delta W = 0$. Mais, comme on l'a vu, δW peut être nul sans que W soit maximum. La sphère est la figure qui correspond au maximum absolu d'énergie; c'est donc à coup sûr une figure d'équilibre stable. Mais il faudrait démontrer rigoureusement qu'il n'existe pas de figures correspondant à des maximums relatifs de W, ni d'autres figures pour lesquelles $\delta W = 0$, sans que W soit maximum. Pourtant, il est probable que la sphère est la seule figure donnant un maximum.

15. **Masse homogène en mouvement conservant une forme invariable.** — Nous supposerons que sur la surface extérieure s'exerce une pression constante. Nous avons vu que le centre de gravité G est animé d'un mouvement rectiligne et uniforme. Par rapport à des axes de directions fixes entraînés par G, le mouvement est le même que si G était immobile. Nous pouvons donc supposer G immobile.

Si la masse se meut en conservant une forme invariable, elle se meut à la façon d'un corps solide. Ce sont les équations d'Euler qui régissent ce mouvement. Considérons les trois axes principaux d'inertie Gx, Gy, Gz attachés à la masse et entraînés dans son mouvement. Soient A, B, C les moments d'inertie par rapport aux axes principaux. Soient ω la rotation instantanée, p, q, r ses pro-

jections sur les axes mobiles, on a

$$(43)\quad \begin{cases} A\dfrac{dp}{dt} + (C - B)qr = L, \qquad B\dfrac{dq}{dt} + (A - C)rp = M, \\ C\dfrac{dr}{dt} + (B - A)pq = N, \end{cases}$$

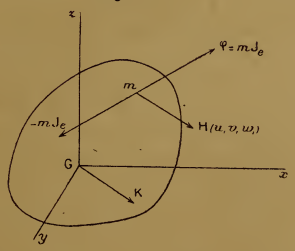
L, M, N étant la somme des moments des forces extérieures par rapport aux axes, ou la projection sur les axes du moment résultant des forces par rapport au centre de gravité. Mais ces forces extérieures, qui sont les pressions, se font équilibre, et les équations se réduisent à

$$(44)\quad \begin{cases} A\dfrac{dp}{dt} + (C - B)qr = 0, \qquad B\dfrac{dq}{dt} + (A - C)rp = 0, \\ C\dfrac{dr}{dt} + (B - A)pq = 0. \end{cases}$$

Le mouvement de la masse est un mouvement à la Poinsot. Ce mouvement sera-t-il possible ? Nous allons voir qu'il ne l'est pas, à moins qu'il ne se réduise à une simple rotation.

16. **Conditions d'équilibre relatif.** — Puisque la masse fluide conserve une forme invariable, elle est en équilibre relatif par rapport aux axes Gx, Gy, Gz. Nous pouvons supposer ces axes fixes à condition d'appliquer en chaque point une force égale et opposée

Fig. 16.



à la force d'entraînement, qu'on désigne sous le nom de force d'inertie d'entraînement (*fig.* 16).

Considérons alors un élément de masse m. Soient u, v, w les

composantes de sa vitesse; p, q, r les projections sur les axes mobiles de la rotation instantanée, on a

$$u = qz - ry, \qquad v = rx - pz, \qquad w = py - qx.$$

Il faut calculer J_e, dont les composantes sont

$$(45) \quad \left\{ \begin{aligned} J_x &= \frac{du}{dt} + qw - rv, \qquad J_y = \frac{dv}{dt} + ru - pw, \\ J_z &= \frac{dw}{dt} + pv - qu. \end{aligned} \right.$$

L'accélération est, en effet, la vitesse absolue du point K, dont les coordonnées sont u, v, w, et K est obtenu en menant par G le vecteur équipollent au vecteur vitesse. On a donc, en désignant par un accent les dérivées par rapport au temps,

$$\begin{aligned} J_x &= q'z - r'y + q(py - qx) - r(rx - pz) \\ &= q'z - r'y - x(q^2 + r^2) + p(qy + rz). \end{aligned}$$

En ajoutant et retranchant p^2x, on obtient la formule plus régulière

$$J_x = q'z - r'y - x(p^2 + q^2 + r^2) + p(px + qy + rz),$$

et les formules analogues pour J_y et J_z. La force d'inertie d'entraînement est le vecteur $-mJ$ et les composantes de la force rapportée à l'unité de masse sont $-J_x$, $-J_y$, $-J_z$.

Si l'équilibre existe par rapport aux axes Gx, Gy, Gz, il a lieu sous l'action des forces réelles et des forces fictives. Nous allons donc écrire dans ce système d'axes les équations fondamentales de l'Hydrodynamique, et nous verrons si ces équations sont possibles. On a

$$\begin{aligned} (46) \quad \frac{1}{\rho}\, dp = f\left[\frac{\partial V}{\partial x}\, dx + \frac{\partial V}{\partial y}\, dy + \frac{\partial V}{\partial z}\, dz\right] \\ - [(q'z - r'y)\, dx + (r'x - p'z)\, dy + (p'y - q'x)\, dz] \\ + (p^2 + q^2 + r^2)(x\, dx + y\, dy + z\, dz) \\ - (px + qy + rz)(p\, dx + q\, dy + r\, dz); \end{aligned}$$

p, q, r, sont des fonctions du temps. L'équation doit être satisfaite à chaque instant t et il n'y a rien de contradictoire à supposer que les forces varient avec le temps. La densité ρ est supposée *constante;* la conclusion serait la même si ρ était fonction de p.

L'équation précédente exprime que le second membre doit être une différentielle totale quand t est traité comme une constante. Il faut et il suffit pour cela que le terme contenant p', q', r' soit une différentielle totale, car les autres le sont déjà. La condition pour que cela soit est

$$\frac{\partial}{\partial y}(q'z - r'y) = \frac{\partial}{\partial x}(r'x + p'z) \qquad \text{ou} \qquad -r' = +r', \qquad r' = 0.$$

On aurait de même $p' = 0$ et $q' = 0$. Ainsi p, q, r sont constants. L'équilibre ne peut avoir lieu que si la rotation est constante. L'axe de rotation est fixe par rapport aux axes mobiles; il est donc fixe dans l'espace.

La rotation se fait autour d'un des axes principaux d'inertie. En effet, les équations du mouvement se réduisent à

$$(17) \qquad (C - B)qr = 0, \qquad (A - C)rp = 0, \qquad (B - A)pq = 0.$$

Si l'ellipsoïde d'inertie n'est pas de révolution, ou bien $q = 0$ et $r = 0$, et les trois équations sont satisfaites; ou bien $q = 0$ et $r \neq 0$ et la seconde équation exige alors $p = 0$; ou encore $r = 0$ et $q \neq 0$, et l'on a $p = 0$. Ainsi la rotation se réduit à une seule des composantes suivant l'un des axes.

Si l'ellipsoïde d'inertie est de révolution, supposons $A = B$, l'axe de révolution est Gz; alors, ou bien $p = 0$ et $q = 0$, et l'axe de rotation est Gz; ou bien p et q ne sont pas tous deux nuls, et alors $r = 0$ et l'axe de rotation est situé dans le plan des xy, et l'on sait que tout axe de ce plan est un axe principal d'inertie. En particulier, on pourrait prendre cet axe de rotation pour axe Gx.

17. **Conditions de stabilité.** — Il ne suffit pas que le mouvement soit possible, il faut qu'il soit stable. Pour un corps solide, il y a trois mouvements permanents possibles. Ces mouvements sont des rotations autour des axes principaux d'inertie. Le mouvement est stable quand la rotation a lieu autour du grand axe ou du petit axe. Il est instable autour de l'axe moyen. Pour un fluide, le mouvement autour de l'axe moyen sera instable à plus forte raison, car il s'introduit ici des conditions supplémentaires, en plus de celles des corps solides.

Le seul mouvement possible est donc une rotation uniforme

autour d'un axe fixe, l'axe de rotation étant confondu avec le *grand* ou le *petit axe* d'inertie.

Nous sommes donc amenés au problème particulier suivant, qui fera l'objet de notre étude :

Considérons une masse fluide tournant à vitesse constante autour d'un axe fixe Gz. Soient Gx_1, Gy_1 deux autres axes fixes, et Gx, Gy des axes entraînés dans le mouvement de rotation, et coïncidant avec les axes principaux d'inertie.

Écrivons que le liquide est en équilibre relatif par rapport aux axes mobiles Gx, Gy, Gz. Les composantes de la force centrifuge par unité de masse sont alors $\omega^2 x$, $\omega^2 y$ et zéro. L'équation d'équilibre s'écrit

$$\frac{1}{\rho}\,dp = f\left(\frac{\partial V}{\partial x}\,dx + \frac{\partial V}{\partial y}\,dy + \frac{\partial V}{\partial z}\,dz\right) + \omega^2(x\,dx + y\,dy),$$

et en intégrant

$$\frac{p}{\rho} = fV + \frac{\omega^2}{2}(x^2 + y^2) + C. \tag{48}$$

Sur la surface libre, la pression est nulle ou constante, soit $p_0 = C'$; l'équation de la surface libre sera

$$fV + \frac{\omega^2}{2}(x^2 + y^2) = K. \tag{49}$$

Il faudra donc chercher quelle forme on doit donner à la masse fluide pour que, V désignant le potentiel dû à cette masse, l'on ait cette relation à la surface en chaque point, en supposant ω donné.

Théorème de Poincaré. — La pression extérieure étant nulle, l'équilibre est impossible, quelle que soit la forme extérieure, si l'on a

$$\frac{\omega^2}{2\pi f\rho} > 1, \tag{50}$$

c'est-à-dire, pour parler un langage vulgaire, si le corps tourne trop vite. En effet, si le corps tourne de plus en plus vite, la force centrifuge périphérique finira par équilibrer l'attraction, puis par la dépasser. Les éléments superficiels tendraient alors à quitter la masse.

Sur la surface $p = 0$, et comme la pression est essentiellement positive à l'intérieur, elle croît quand on s'éloigne de la surface, vers l'intérieur, c'est-à-dire qu'en tous ses points $\frac{dp}{dn_i}$ est positif. L'équation d'équilibre

$$dp = \rho\, dU, \qquad \text{où} \qquad U = fV + \frac{\omega^2}{2}(x^2 + y^2),$$

donne

$$\frac{dp}{dn_i} = \rho \frac{dU}{dn_i};$$

$\frac{dU}{dn_i}$ est donc positif en tous les points de la surface. Par conséquent, $\frac{dU}{dn_e}$ est négatif en tous les points de la surface, puisque U est continu ainsi que ses dérivées premières. Appliquons alors le théorème de Green au volume total et à la fonction U, on a

$$\int_T \Delta U\, d\tau = \int_S \frac{dU}{dn_e} d\sigma \qquad \text{ou} \qquad (2\omega^2 - 4\pi f\rho)\int_T d\tau = \int_S \frac{dU}{dn_e} d\sigma.$$

Le second membre est négatif; il faut donc $2\omega^2 - 4\pi f\rho < 0$, autrement en certains points $\frac{dU}{dn_e}$ serait positif, par conséquent $\frac{dU}{dn_i}$ serait négatif et l'équilibre y serait impossible. Pour le rendre possible, il faudrait ajouter à l'extérieur une certaine pression.

Cette limite de Poincaré a été abaissée par Crudeli [1], qui a réussi à démontrer, en supposant que la surface libre soit *convexe*, que l'on doit avoir

$$\frac{\omega^2}{2\pi f\rho} < \frac{1}{2}.$$

18. **Ellipsoïdes de Maclaurin.** — Nous allons étudier maintenant les diverses formes d'équilibre; dans l'ordre historique, la première forme indiquée par Maclaurin est l'ellipsoïde de révolution. On l'appelle souvent l'ellipsoïde de Maclaurin.

Le potentiel de l'ellipsoïde de révolution pour l'intérieur, celui

---

[1] *Rendi Conti Acad. dei Lincei*, 1910, p. 666.

qui nous intéresse ici, est

$$V = \pi abc\rho \int_0^\infty \left(1 - \frac{x^2}{a^2+\lambda} - \frac{y^2}{b^2+\lambda} - \frac{z^2}{c^2+\lambda}\right) \frac{d\lambda}{\sqrt{\varphi(\lambda)}},$$

$$\varphi(\lambda) = (a^2+\lambda)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda).$$

Si l'ellipsoïde est de révolution $a = b$, on aura

$$V = \pi a^2 c\rho \int_0^\infty \left(1 - \frac{x^2+y^2}{a^2+\lambda} - \frac{z^2}{c^2+\lambda}\right) \frac{d\lambda}{(a^2+\lambda)\sqrt{c^2+\lambda}}.$$

L'intégrale elliptique se réduit alors à des intégrales élémentaires. Les composantes de l'attraction sont

$$X = f\frac{\partial V}{\partial x} = -Px, \qquad Y = f\frac{\partial V}{\partial y} = -Py, \qquad Z = f\frac{\partial V}{\partial z} = -Rz.$$

Les coefficients P et R ayant les valeurs

$$P = 2\pi a^2 cf\rho \int_0^\infty \frac{d\lambda}{(a^2+\lambda)^2\sqrt{c^2+\lambda}},$$

$$R = 2\pi a^2 cf\rho \int_0^\infty \frac{d\lambda}{(c^2+\lambda)^{\frac{3}{2}}(a^2+\lambda)}.$$

L'équation d'équilibre relatif par rapport aux axes Gx, Gy entraînés dans le mouvement de rotation est

$$\frac{dp}{\rho} = -P(x\,dx + y\,dy) - Rz\,dz + \omega^2(x\,dx + y\,dy).$$

La force qui agit sur l'élément de masse-unité est, en effet,

$$-Px + \omega^2 x, \quad -Py + \omega^2 y, \quad -Rz.$$

En intégrant, on a

$$\frac{p}{\rho} = -\frac{1}{2}[(P - \omega^2)(x^2+y^2) + Rz^2] + C.$$

On obtient ainsi la pression à l'intérieur de l'ellipsoïde et à la surface, et les surfaces d'égale pression ont pour équation $p = \text{const.}$, c'est-à-dire

$$(52) \qquad (P - \omega^2)(x^2+y^2) + Rz^2 = C.$$

Ce sont des ellipsoïdes de révolution autour du même axe Gz.

Or, l'ellipsoïde dont nous sommes partis est soumis à sa surface à une pression constante ou nulle. Pour que ce soit une surface d'équilibre, il faut et il suffit que cette surface extérieure soit une surface d'égale pression. Il faut donc qu'on puisse déterminer la constante C de façon que l'ellipsoïde d'égale pression se confonde avec l'ellipsoïde d'équilibre. Il suffit d'exprimer que les coefficients sont proportionnels, et l'on a les conditions

$$a^2(\mathrm{P} - \omega^2) = c^2\mathrm{R} = \mathrm{C}. \tag{53}$$

On tirera C de ces équations et l'on en déduira l'équation de condition entre les axes et ω. Il faut montrer que cette équation de condition peut être réalisée.

1° Cette condition exige que l'*ellipsoïde soit aplati*, c'est-à-dire que l'axe de rotation soit le plus petit axe, $c > a$. En effet, cette condition peut s'écrire

$$a^2\mathrm{P} - c^2\mathrm{R} = a^2\omega^2 > 0$$

ou

$$\int_0^\infty \left[\frac{a^2}{(a^2+\lambda)\sqrt{\varphi(\lambda)}} - \frac{c^2}{(c^2+\lambda)\sqrt{\varphi(\lambda)}}\right] d\lambda$$
$$= (a^2 - c^2)\int_0^\infty \frac{\lambda\, d\lambda}{(a^2+\lambda)(c^2+\lambda)\sqrt{\varphi(\lambda)}} > 0.$$

La seconde intégrale étant nécessairement positive, on a $a^2 - c^2 > 0$ ou $a > c$. Ainsi, l'ellipsoïde est nécessairement aplati.

2° c' étant la distance du centre au foyer, $\frac{c'}{a}$ est l'*excentricité* $c'^2 = a^2 - c^2$. Introduisons la quantité $\frac{c'}{c} = l$ analogue à l'excentricité, on a

$$a^2 = c'^2 + c^2 = c^2(1 + l^2), \qquad a = c\sqrt{1 + l^2}.$$

Nous allons chercher à exprimer l'équation de condition en fonction de l. Divisons-la d'abord par c^2, elle s'écrira

$$(1 + l^2)\mathrm{P} - \mathrm{R} = \omega^2(1 + l^2), \qquad \omega^2 = \frac{(1 + l^2)\mathrm{P} - \mathrm{R}}{1 + l^2}; \tag{54}$$

P et R dépendent des axes ou plutôt du rapport des axes seulement,

car, dans l'équation ci-dessus, ni ω ni l ne dépendent de l'unité de longueur, ni P ni R par conséquent. Pour faire le calcul de P, posons $\lambda = c^2 t$:

$$P = 2\pi a^2 c f \rho \int_0^\infty \frac{c\,dt}{(a^2 + c^2 t)^2 \sqrt{1+t}}.$$

Remplaçons a^2 par sa valeur ci-dessus en fonction de c^2 et de l^2, il vient

$$P = 2\pi f \rho (1 + l^2) \int_0^\infty \frac{dt}{(1 + l^2 + t)^2 \sqrt{1+t}};$$

P ne dépend plus que du rapport des axes. Il suffit maintenant de poser $t + 1 = u^2$ pour rendre l'expression rationnelle. On trouve

$$P = 2\pi f \rho \frac{1 + l^2}{l^3} \left(\text{arc tang}\, l - \frac{l}{1 + l^2}\right),$$

$$R = 2\pi f \rho \frac{1 + l^2}{l^3} (2\,l - 2 \text{ arc tang}\, l);$$

en portant ces valeurs de P et R dans l'équation de condition, on a

$$(55) \qquad \frac{\omega^2}{2\pi f \rho} = \frac{(3 + l^2) \text{ arc tang}\, l - 3\,l}{l^3}.$$

C'est la seule équation de condition, et, si elle est vérifiée, nous pourrons toujours déterminer la valeur de C qui correspond à la surface extérieure.

Généralement, on se donne M et ω; est-il possible alors d'avoir comme figure d'équilibre un ellipsoïde de révolution? L'équation (55) donnera les valeurs de l s'il y en a qui résolvent le problème, puis on aura la valeur des axes par les formules

$$(56) \qquad M = \frac{4}{3}\pi a^2 c \rho = \frac{4}{3}\pi \rho c^3 (1 + l^2) = \frac{4}{3}\pi \rho \frac{a^3}{\sqrt{1 + l^2}}.$$

Ces dernières équations donnent a et c, connaissant M et l.

19. **Discussion.** — Toute la difficulté du problème est concentrée sur la résolution de l'équation transcendante (55).

Désignons par h la valeur du second membre de cette équation;

pour l très petit, on a

$$\operatorname{arc\,tang} l = l - \frac{l^3}{3} + \frac{l^5}{5} \cdots, \qquad h = \frac{4}{15} l^2 \ldots = \frac{8}{15} e \ldots,$$

où e désigne l'aplatissement, défini par rapport à l et aux axes par

$$1 + l^2 = \frac{a^2}{c^2} = \frac{1}{(1-e)^2} = 1 + 2e \ldots.$$

Pour $l = 0$, on a donc $h = 0$, puis, l croissant, $h > 0$.

Pour l infini, on a $\operatorname{arc\,tang} l = \frac{\pi}{2}$; h est de l'ordre $\frac{1}{l}$ et, par conséquent, nul. Ainsi h est nul aux deux limites, et d'abord croissant.

Prenons la dérivée de h par rapport à l, on obtient

$$\frac{dh}{dl} = \frac{9 + l^2}{l^4} \varphi(l), \qquad \varphi(l) = \frac{7l^2 + 9}{(1 + l^2)(9 + l^2)} l - \operatorname{arc\,tang} l.$$

Le signe de $\frac{dh}{dl}$ est le même que celui de $\varphi(l)$. Pour l très petit, on a, en négligeant l^7,

$$\varphi(l) = l\left(1 - \frac{1}{3} l^2 + \frac{7}{27} l^4 + \ldots\right) - \operatorname{arc\,tang} l = \frac{8}{135} l^5 \ldots.$$

La dérivée est d'abord nulle, puis devient positive. A l'infini, $\varphi(l)$ se réduit à $-\frac{\pi}{2}$ et la dérivée est négative.

Prenons de nouveau la dérivée de $\varphi(l)$ par rapport à l, on a

$$\varphi'(l) = \frac{8l^4(3 - l^2)}{(1 + l^2)^2 (9 + l^2)^2}.$$

Cette expression est d'abord positive, s'annule pour $l = \sqrt{3}$, puis devient négative. L'expression $\varphi(l)$, nulle pour $l = 0$, sera d'abord croissante jusqu'au maximum $\varphi_1(l)$ pour $l = \sqrt{3}$, puis toujours décroissante pour $l > \sqrt{3}$, et tendra vers $-\frac{\pi}{2}$. Par conséquent, $\varphi(l)$ aura une racine et une seule $l_0 > \sqrt{3}$. Il en sera de même pour $\frac{dh}{dl}$.

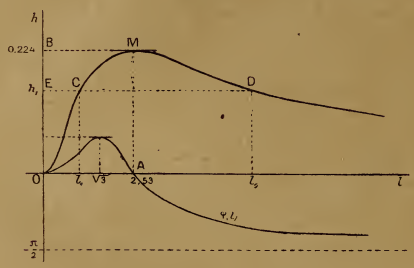
Désignons par l_0 cette valeur de l qui annule $\varphi(l)$ et $\frac{dh}{dl}$; elle est définie par

$$\operatorname{arc\,tang} l = \frac{1}{1 + l^2} \frac{9 + 7l^2}{9 + l^2}.$$

On trouve $l_0 = 2{,}53\ldots$, et la valeur correspondante de h est $h_0 = 0{,}224$. Ainsi pour $l < l_0$, on a $\frac{dh}{dl} > 0$, la fonction est croissante; pour $l > l_0$, elle est décroissante; elle est maximum pour $l = l_0$.

Prenons deux axes Ol et Oh, et traçons la courbe représentative de $h' = \varphi(l)$ et de $h =$ le second membre de (55) (*fig.* 17).

Fig. 17.



L'ordonnée de la courbe $\varphi(l)$ part de O, a un maximum pour $l = \sqrt{3}$, s'annule pour $l = l_0 = 2{,}53\ldots$, et tend ensuite vers $-\frac{\pi}{2}$.

La courbe h part de O tangente à Ol, son ordonnée croît jusqu'à un maximum $h = h_0 = 0{,}224\ldots$ pour $l = l_0$, puis décroît en se rapprochant asymptotiquement de l'axe Ol. Pour le tracé de la courbe, on a pris pour les ordonnées une unité 10 fois plus grande que pour les abscisses.

Cette courbe des valeurs de h étant tracée, quand on se donnera ω, il suffira, pour trouver les valeurs de l, de mener parallèlement à Ol la droite CD d'ordonnée $h_1 = \frac{\omega^2}{2\pi f\rho}$. Les valeurs l_1 et l_2 de l correspondant aux points d'intersection C et D donneront les éléments de l'ellipsoïde d'équilibre.

En général, pour une valeur de h, il y a deux valeurs de l, l_1 et l_2. Il y aura donc, pour chaque valeur de ω, deux ellipsoïdes d'équilibre.

Si $\frac{\omega^2}{2\pi f\rho} < 0{,}224\ldots$, il y a *deux ellipsoïdes* de Maclaurin.

Si $\frac{\omega^2}{2\pi f\rho} = 0{,}224\ldots$, il n'y a qu'*un seul* ellipsoïde limite.

Si $\frac{\omega^2}{2\pi f\rho} > 0{,}224\ldots$, le problème n'a *plus d'ellipsoïde* de révolution comme solution. S'il y a des figures d'équilibre, il faut les chercher dans d'autres formes. Autrement dit, l'ellipsoïde de Maclaurin ne peut plus être une forme d'équilibre si la vitesse de rotation devient trop grande.

On peut se demander si les corps célestes, et en particulier la Terre, sont des ellipsoïdes de Maclaurin. On admet, d'ailleurs, que ce sont des ellipsoïdes de révolution.

Remarquons d'abord que, pour toutes les planètes, la racine l_2 ne peut pas convenir. En effet, pour $l \geqq 2{,}53\ldots$, l'aplatissement est

$$(57) \qquad e = \frac{a-c}{a} = 1 - \frac{1}{\sqrt{1+l^2}} > 1 - \frac{1}{\sqrt{1+4}} > \frac{1}{2},$$

et l'on sait que les aplatissements de la Terre et des planètes sont beaucoup plus petits. La racine l_1 seule peut donc convenir.

Calculons donc l_1 dans le cas de la Terre. Prenons pour unité de temps la seconde sidérale et remplaçons f par sa valeur déjà trouvée (p. 41), on obtient

$$\frac{\omega^2}{2\pi f\rho} = \left(\frac{2\pi}{24\times 60^2}\right)^2 \frac{2a}{3g} = \frac{4\pi.2\pi a}{24^2.60^4.3g} = \frac{4\times 3{,}14\times 40000000}{24^2\times 60^4\times 3\times 9{,}81} = 0{,}00227\ldots.$$

Après avoir calculé cette valeur, on la porte dans l'équation (55) et l'on prend la plus petite racine l. L'aplatissement correspondant serait alors $e = \frac{1}{231}$. Cette valeur est certainement en désaccord avec les observations géodésiques. L'aplatissement donné par Helmert en 1901 est $\frac{1}{298}$ et celui donné par Hayford en 1909 est $\frac{1}{297}$. L'aplatissement trouvé est donc trop grand. Il faut en conclure que si la Terre est un ellipsoïde de révolution, et si elle a été fluide autrefois, elle n'est pas homogène. On a les mêmes résultats pour les autres planètes.

Que se passe-t-il si ω tend vers zéro? L'une des racines devient nulle, l'ellipsoïde se rapproche de la sphère; l'autre grandit indéfiniment.

Pour l très petit, $\frac{c'}{c}$ est très voisin de o. Donc, pour l infiniment petit, la figure d'équilibre se rapproche indéfiniment de la sphère, qui est d'ailleurs la figure d'équilibre d'une masse immobile.

Si l est très grand, c est très petit et a est très grand, d'après les équations (56) qui donnent

$$c^3 = \frac{3M}{4\pi\rho}\frac{1}{1+l^2}, \qquad a^3 = \frac{3M}{4\pi\rho}\sqrt{1+l^2}.$$

On a une figure d'équilibre qui est un ellipsoïde très aplati, une sorte de disque de très grand rayon et de très faible épaisseur centrale. Cette figure disparaîtrait pour ω nul et l infini, car la limite serait un plan indéfini d'épaisseur nulle.

20. **Ellipsoïdes de Jacobi.** — Jacobi a réussi à démontrer que, parmi les figures d'équilibre possibles, se trouvent des ellipsoïdes à trois axes inégaux.

Les équations d'équilibre relatif par rapport à des axes entraînés dans le mouvement sont, dans ce cas, les suivantes. On a d'abord, pour le potentiel intérieur,

$$V = \pi abc\rho\int_0^\infty\left(1 - \frac{x^2}{a^2+\lambda} - \frac{y^2}{b^2+\lambda} - \frac{z^2}{c^2+\lambda}\right)\frac{d\lambda}{\sqrt{\varphi(\lambda)}}.$$

La force d'attraction a pour projections

$$X = f\frac{\partial V}{\partial x} = -Px, \qquad P = 2\pi fabc\rho\int_0^\infty\frac{d\lambda}{(a^2+\lambda)\sqrt{\varphi(\lambda)}}, \qquad \ldots$$

L'équation d'équilibre différentielle et intégrée sera

$$\frac{dp}{\rho} = -Px\,dx - Qy\,dy - Rz\,dz + \omega^2(x\,dx + y\,dy),$$

$$\frac{p}{\rho} = -\frac{1}{2}[(P-\omega^2)x^2 + (Q-\omega^2)y^2 + Rz^2] + C.$$

Les surfaces d'égale pression $p = \text{const.}$ sont alors

$$(P-\omega^2)x^2 + (Q-\omega^2)y^2 + Rz^2 = C. \tag{58}$$

Ce sont des surfaces du second ordre, homothétiques et concentriques. Mais, sur la surface extérieure, la pression est constante

ou nulle. Il faut donc que la surface libre soit une surface d'égale pression. Ses axes, a, b, c seront donc proportionnels à ceux de la quadrique (58), d'où

$$a^2(\mathrm{P}-\omega^2) = b^2(\mathrm{Q}-\omega^2) = c^2\mathrm{R}. \tag{59}$$

Ce sont les conditions nécessaires et suffisantes du problème. Comme dans le cas précédent, formons l'expression qui donne ω et l'expression indépendante de ω; il vient

$$\omega^2 = \frac{a^2\mathrm{P}-b^2\mathrm{Q}}{a^2-b^2}, \quad \text{et} \quad a^2b^2(\mathrm{P}-\mathrm{Q})+c^2(a^2-b^2)\mathrm{R} = 0. \tag{60}$$

Or,

$$\begin{aligned} a^2\mathrm{P}-b^2\mathrm{Q} &= 2\pi f abc\rho\int_0^\infty\left(\frac{a^2}{a^2+\lambda}-\frac{b^2}{b^2+\lambda}\right)\frac{d\lambda}{\sqrt{\varphi(\lambda)}} \\ &= 2\pi f abc\rho(a^2-b^2)\int_0^\infty\frac{\lambda\,d\lambda}{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)\sqrt{\varphi(\lambda)}}; \end{aligned}$$

donc

$$\frac{\omega^2}{2\pi f\rho} = abc\int_0^\infty\frac{\lambda\,d\lambda}{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)\sqrt{\varphi(\lambda)}}.$$

La seconde équation est homogène en P, Q, R; négligeons le facteur commun $2\pi abcf\rho$, on aura

$$\begin{aligned} &\int_0^\infty\left[a^2b^2\left(\frac{1}{a^2+\lambda}-\frac{1}{b^2+\lambda}\right)+\frac{c^2(a^2-b^2)}{c^2+\lambda}\right]\frac{d\lambda}{\sqrt{\varphi(\lambda)}} \\ &= (b^2-a^2)\int_0^\infty\left[\frac{a^2b^2}{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)}-\frac{c^2}{c^2+\lambda}\right]\frac{d\lambda}{\sqrt{\varphi(\lambda)}} = 0. \end{aligned}$$

Nous supposons a^2-b^2 différents de 0, autrement on retomberait sur les ellipsoïdes de Maclaurin.

Ces deux équations se transforment de la façon suivante :

1° On prévoit que la première ne peut dépendre que du rapport des axes et non des axes eux-mêmes, puisque $\frac{2\pi f\rho}{\omega^2}$ n'en dépend pas. Posons $\lambda = c^2x$, les limites restent 0 et ∞, et il vient

$$\frac{\omega^2}{2\pi f\rho} = abc\int_0^\infty\frac{c^4x\,dx}{(a^2+c^2x)(b^2+c^2x)\sqrt{(a^2+c^2x)(b^2+c^2x)(c^2+c^2x)}}.$$

Enfin, en divisant numérateur et dénominateur par a^3b^3, et

posant $\frac{c^2}{a^2} = s$, $\frac{c^2}{b^2} = t$, on obtient

$$(61)\quad \frac{\omega^2}{2\pi f\rho} = st\int_0^\infty \frac{x\,dx}{(1+sx)(1+tx)\Delta}, \qquad \Delta = \sqrt{(1+sx)(1+tx)(1+x)}.$$

2° Dans le deuxième, on pose de même $\lambda = c^2 x$, et il vient

$$\int_0^\infty \left[\frac{1}{(1+sx)(1+tx)} - \frac{1}{1+x}\right]\frac{dx}{\Delta} = \int_0^\infty \frac{(1-s-t)x - stx^2}{\Delta^3}\,dx = 0$$

ou

$$(62)\qquad (1-s-t)\int_0^\infty \frac{x\,dx}{\Delta^3} - st\int_0^\infty \frac{x^2\,dx}{\Delta^3} = 0.$$

Les équations (61) et (62) déterminent s et t quand on se donne ω (on verra plus loin le cas où l'on se donne le moment de rotation), et le problème se ramène à la résolution de ces deux équations transcendantes.

Ayant s et t, nous en déduirons les valeurs des axes au moyen des relations

$$c = a\sqrt{s} = b\sqrt{t}$$

et

$$(63)\qquad M = \frac{4}{3}\pi abc\rho = \frac{4}{3}\pi\rho\frac{c^3}{\sqrt{st}} = \frac{4}{3}\pi\rho\frac{a^3 s}{\sqrt{t}} = \frac{4}{3}\pi\rho\frac{b^3 t}{\sqrt{s}}.$$

Remarque. — D'après l'équation (62), on voit que $s+t<1$. En effet, s et t étant positifs ainsi que les intégrales, on a $1-s-t>0$. Alors s et t doivent être séparément plus petits que l'unité, c'est-à-dire

$$\frac{c^2}{a^2} < 1, \qquad \frac{c^2}{b^2} < 1.$$

L'axe de rotation c est donc le petit axe. L'ellipsoïde tourne autour de son plus petit axe.

21. **Discussion en prenant la vitesse de rotation et la densité comme paramètres.** — On se donne ω, il s'agit de déterminer s et t au moyen des équations (61) et (62). On pourrait procéder autrement, se donner s et t, puis chercher la valeur correspondante

de ω. On obtiendrait les mêmes résultats. On considère ici la densité du liquide comme invariable.

Tout revient donc à la discussion du système des deux équations. La discussion complète a été faite pour la première fois par Otto Meyer (*Journal de Mathématiques*, t. XXIV). Elle est exposée par Tisserand dans sa *Mécanique céleste* (t. II). On pose $h = \frac{\omega^2}{2\pi f\rho}$ et cette expression sera une fonction de s et de t, définie par (61). On désigne la valeur du premier membre de (62) par ψ. Alors t pourra être regardé comme une fonction de s définie à son tour par la relation $\psi = 0$:

$$(61') \qquad h = \varphi(s, t) = st\int_0^\infty \frac{x\,dx}{(1+sx)(1+tx)\Delta},$$

$$(62') \qquad 0 = \psi(s, t) = (1-s-t)\int_0^\infty \frac{x\,dx}{\Delta^3} - st\int_0^\infty \frac{x^2\,dx}{\Delta^3}.$$

Nous allons démontrer que l'équation $\psi = 0$ a toujours une racine et une seule en s pour chaque valeur de t, et que l'expression h a toujours une valeur et une seule pour chaque valeur de t ou de s, avec un maximum pour $s = t = t_0$. Il y a dans chaque cas un seul ellipsoïde de Jacobi comme figure d'équilibre.

Ces deux équations définissent une courbe de l'espace au moyen des trois variables h, s et t. Un point J de la courbe est à la cote h et a pour projection sur le plan des s, t un point R. Le point R est sur la courbe $\psi(s, t) = 0$ qui est la projection, sur le plan des s, t, de la courbe de l'espace $h = \varphi(s, t)$.

1° *Étude de* $\psi(s, t)$. — Nous avons désigné le premier membre de (62) par ψ; nous allons voir que cette fonction de s et de t a une seule racine en s quand t est donné entre zéro et 1. Posons avec Radau

$$s + t = p \qquad \text{et} \qquad st = q,$$

d'où

$$dp = ds + dt \qquad \text{et} \qquad dq = t\,ds + s\,dt.$$

On aura, en désignant par A et B les intégrales figurant dans ψ,

$$(63) \quad \psi = (1-p)A - qB, \qquad A = \int_0^\infty \frac{x\,dx}{\Delta^3}, \qquad B = \int_0^\infty \frac{x^2\,dx}{\Delta^3}.$$

Le dénominateur Δ s'écrit

$$\Delta^2 = (1+x)(1+sx)(1+tx) = (1+x)(1+px+qx^2).$$

En prenant la dérivée partielle de ψ par rapport à s, on a

$$\psi'_s = -A - Bt + (1-p)A'_s - qB'_s,$$
$$A'_s = \frac{\partial A}{\partial s} = -\frac{3}{2}\int_0^\infty \frac{x^2(1+x)(1+tx)}{\Delta^5}\,dx.$$

Pour B'_s, on a la même expression multipliée par x, sous le signe $\int$. En combinant ces deux expressions, on obtient

$$(1-p)A'_s - qB'_s = -\frac{3}{2}\int_0^\infty \frac{x^2(1+x)(1+tx)}{\Delta^5}(1-p-qx)\,dx = -A_1 - B_1 t,$$

en posant

$$A_1 = \frac{3}{2}\int_0^\infty \frac{x^2(1+x)}{\Delta^5}(1-p-qx)\,dx$$

avec l'expression analogue pour B_1. On a alors

$$\psi'_s = -(A+A_1) - (B+B_1)t = -A_0 - B_0 t,$$

où

$$A + A_1 = A_0 = \int_0^\infty \frac{x(1+x)}{2\Delta^5}(2+3x-px-qx^2)$$

et l'expression analogue $B + B_1 = B_0$.

Considérons maintenant l'expression suivante :

$$\frac{d}{dx}\frac{x^2(1+x)}{\Delta^3} = \frac{x(1+x)}{2\Delta^5}(4+3x+px-2qx^2-3qx^3).$$

On voit immédiatement que cette expression, intégrée de zéro à l'infini, est nulle aux deux limites. Nous désignerons cette intégrale nulle par C :

$$C = \int_0^\infty \frac{x(1+x)}{2\Delta^5}(4+3x+px-2qx^2-3qx^3)\,dx = \left|\frac{x^2(1+x)}{\Delta^3}\right|_0^\infty = 0.$$

Formons alors l'expression suivante :

$$2A_0 = 2A_0 - C = \frac{3}{2}\int_0^\infty \frac{x^2(1+x)}{\Delta^5}(1-p+qx^2)\,dx;$$

comme on a $p < 1$, on a également $A_0 > 0$. Cette valeur de A_0

donne

$$2A_0 + 3B_0 = \frac{3}{2}(3-p)\int_0^\infty \frac{x^2(1+x)^2}{\Delta^5}\,dx = \frac{3}{2}(3-p)D.$$

On désigne par D l'intégrale qui est toujours positive. Nous pouvons écrire évidemment ψ'_s sous la forme

$$-\chi'_s = A_0\left(1-\frac{2}{3}t\right) - \frac{t}{3}(2A_0+3B_0).$$

Comme on a $t < 1$, le second membre est toujours positif. On a donc $\psi'_s < 0$. La fonction ψ est toujours décroissante par rapport à s. Elle varie toujours dans le même sens et ne peut avoir qu'une racine quand s varie entre ses limites, la valeur de t étant supposée donnée et constante. Il en est de même par rapport à t, si l'on fait varier t; on retrouverait les mêmes expressions. L'équation (62), c'est-à-dire $\psi = 0$, ne peut avoir qu'une solution en s quand t est donné.

Dans ψ faisons $s = 0$ et $s = 1$, on obtient

$$\psi_0 = (1-t)\int_0^\infty \frac{x\,dx}{(1+x)^{\frac{3}{2}}(1+tx)^{\frac{3}{2}}} > 0,$$

$$\psi_1 = -t \int_0^\infty \frac{x\,dx}{(1+x)^2(1+tx)^{\frac{3}{2}}} < 0.$$

La première expression est positive, la seconde négative, donc ψ s'annule une fois et une seule avec s. Il en sera de même par rapport à t si s est donné. L'expression (62) aura donc toujours une racine et une seule en s pour chaque valeur de t et réciproquement. L'un des aplatissements étant déterminé, l'autre le sera également. Il n'y aura chaque fois qu'un ellipsoïde d'équilibre possible.

Si nous considérons maintenant s comme fonction de t, fonction définie par l'équation $\psi = 0$, on aura

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{\partial\psi}{\partial s}\frac{ds}{dt} + \frac{\partial\psi}{\partial t} = 0;$$

comme

$$\frac{\partial\psi}{\partial s} < 0 \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial\psi}{\partial t} < 0,$$

on a

$$\frac{ds}{dt} < 0;$$

s et t varient donc toujours en sens inverse. De plus, leurs valeurs

sont réciproques. Pour $s = 0$ on a $t = 1$, et pour $s = 1$ on a $t = 0$, et ainsi pour toutes les valeurs de s, puisque l'expression ψ est symétrique en s et t. A chaque couple de valeurs s_1 et t_1 correspond un autre couple $s = t_1$ et $t = s_1$: ces deux couples définissent deux ellipsoïdes identiques, où l'on a simplement permuté les axes a et b.

Les deux valeurs de s et de t se croisent et deviennent égales pour une valeur intermédiaire que nous désignerons par t_0. On aura donc

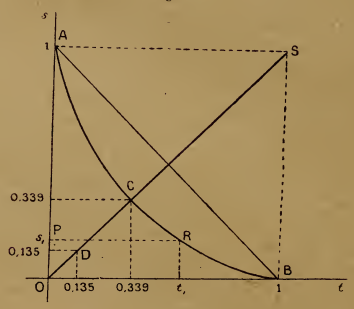
$$s = t = t_0.$$

Les axes correspondants sont alors égaux et l'ellipsoïde est de révolution. Cette valeur t_0 se détermine au moyen de l'équation (62), qui devient dans ce cas

$$(1 - 2t_0)\int_0^\infty \frac{x\,dx}{\Delta^3} = t_0^2\int_0^\infty \frac{x^2\,dx}{\Delta^3}, \qquad \Delta = (1 + t_0 x)\sqrt{1 + x}.$$

Construisons maintenant la courbe $\psi(s, t) = 0$ dans le plan sOt

Fig. 18.



(*fig.* 18), en faisant les remarques suivantes :

1° s et t sont essentiellement positifs;

2° $\psi(s, t)$ est symétrique par rapport à s et t; la courbe est symétrique par rapport à la bissectrice OS de sOt;

3° Si $s = 0$, on a $t = 1$, car le coefficient de l'intégrale positive de $\psi = 0$ se réduit à $1 - t = 0$, point B;

4° Si s augmente, t diminue et pour $s = 1$ on a de même $t = 0$, point A. La courbe est même constamment au-dessous de la droite AB, puisque l'on a $s + t < 1$;

5° Enfin, étant donnée une valeur s_1 de s, comprise entre 0 et 1, il y a toujours une valeur t_1 de t et une seule qui y correspond; autrement dit, PR, parallèle à OB, rencontre la courbe en un point R et en un seul.

Les coordonnées du point C situé sur la bissectrice sont celles données par la relation $s = t = t_0 = 0{,}3396$, que nous calculerons tout à l'heure.

2° *Étude de* $h = \varphi(s, t)$. — Nous considérons maintenant t comme défini par la relation $\psi(s, t) = 0$. Nous avons, en tenant compte des valeurs de ψ'_s et ψ'_t, de dp et de dq,

$$-d\psi = -\psi'_s\, ds - \psi'_t\, dt = A_0\, dp + B_0\, dq = 0.$$

Introduisons l'expression

$$r = (s - t)^2 = p^2 - 4q, \qquad 2p\, dp = dr + 4\, dq,$$

expression toujours positive, qui s'annule pour $s = t = t_0$ et qui varie de 0 à 1. Nous pourrons considérer h comme fonction de r et de q, et q comme fonction de r définie par $\psi = 0$. On a, en remplaçant dp par sa valeur en fonction de dr,

$$-2p\, d\psi = A_0\, dr + (4A_0 + 2pB_0)\, dq.$$

Si nous formons maintenant l'expression suivante, en introduisant $C = 0$, on obtient

$$4A_0 + 2pB_0 = 4A_0 + 2pB_0 - 2C = (3 - p)B,$$

où B est une intégrale toujours positive, définie plus haut. On a alors pour $d\psi$

$$-2p\, d\psi = A_0\, dr + (3 - p)B\, dq = 0.$$

Cette expression définit la variation de q par rapport à r, d'après (62). On a donc toujours $\frac{dq}{dr} < 0$; car, A_0 et B étant positifs, on doit avoir dr et dq de signes contraires.

Considérons maintenant l'expression (61), qui donne h en fonc-

tion de s et t ou en fonction de r et q. Nous allons démontrer qu'elle varie toujours dans le même sens avec r et qu'elle est maximum pour $r = 0$, c'est-à-dire $s = t = t_0$. On peut l'écrire

$$h = st \int_0^\infty \frac{x(1+x)}{\Delta^3} dx = q(A + B),$$

où, d'après (62),

$$h = (1 - p + q)A = (1 - s)(1 - t) \int_0^\infty \frac{x\,dx}{\Delta^3}.$$

On a donc

$$dh = (-dp + dq)A + (1 - p + q)(A'_s\,ds + A'_t\,dt).$$

Les valeurs trouvées plus haut pour A'_s et A'_t donnent immédiatement

$$A'_s\,ds + A'_t\,dt = -\frac{3}{2}\int_0^\infty \frac{x^2(1+x)}{\Delta^5}(dp + x\,dq),$$

$$dh = (-dp + dq)\int_0^\infty \frac{x\,dx}{\Delta^3} - \frac{3}{2}(1 - p + q)\int_0^\infty \frac{x^2(1+x)}{\Delta^5}(dp + x\,dq).$$

Faisons apparaître le dénominateur Δ^5 dans la première intégrale, remplaçons dp par sa valeur en fonction de dr, et tenons compte de l'expression $C = 0$; on obtient finalement

$$-4p\,dh = 3D(q\,dr - r\,dq) - pB\,dq$$

ou

$$-4p\frac{dh}{dr} = 3qD - (3rD + pB)\frac{dq}{dr}.$$

On a donc toujours $\frac{dh}{dr} < 0$, puisque $\frac{dq}{dr} < 0$.

D'autre part, l'expression de $d\psi$ donne, si l'on y fait $s = t$,

$$-d\psi = (A_0 + sB_0)\,dp, \qquad \text{car} \qquad dq = s\,dp.$$

On aura donc à la fois, pour $s = t$ ou $r = 0$,

$$dp = dq = dr = dh = 0.$$

Ainsi, h varie toujours en sens inverse de $r = (s - t)^2$ et dh s'annule pour $r = 0$. Donc h croît pour s allant de 1 à $t = t_0$, décroît pour s allant de t_0 à 0 et est maximum pour $s = t = t_0$.

D'ailleurs, en remplaçant dr par sa valeur en fonction de ds

et dt, on peut écrire

$$\frac{dh}{ds} = \left[2(t-s)\left(\frac{dt}{ds}-1\right)\right]\frac{dh}{dr} \qquad \text{avec } \frac{dt}{ds} < 0;$$

dh est positif et h croissant pour $s < t = t_0$. Il est négatif et h décroissant pour $s > t$. h est maximum pour $s = t = t_0$.

3° *Détermination de t_0 et h_0.* — Pour $s = t = t_0$, les deux équations fondamentales deviennent

$$h_0 = t_0^2 \int_0^\infty \frac{x\,dx}{(1+t_0x)^3\sqrt{1+x}},$$

$$\psi = (1-2t_0)\int_0^\infty \frac{x\,dx}{(1+t_0x)^3(1+x)^{\frac{3}{2}}} - t_0^2\int_0^\infty \frac{x^2\,dx}{(1+t_0x)^3(1+x)^{\frac{3}{2}}} = 0.$$

On pourrait les intégrer en les décomposant en fractions rationnelles. Mais on a un ellipsoïde de révolution et il est plus simple de revenir aux notations de ce cas particulier. On pose

$$\frac{1}{t_0} = 1 + l^2.$$

On a, en remplaçant $1+x$ par $\frac{1}{x^2}$, et supprimant des facteurs dans ψ,

$$h_0 = 2(1+l^2)\int_0^1 \frac{x^2(1+x^2)}{(1+l^2x^2)^3}\,dx,$$

$$\psi_1 = \int_0^1 \frac{x^2(1-x^2)(1-l^4x^2)}{(1+l^2x^2)^3}\,dx = 0.$$

Or, on peut écrire

$$\frac{1+3l^2}{2}h_0 - (1-l^2)\psi_1$$
$$= 2l^2\int_0^1 \frac{x^2\,dx}{1+l^2x^2} + l^2(1+l^2)\int_0^1 \frac{3x^2-(5+l^2)x^4-l^2x^6}{(1+l^2x^2)^3}\,dx.$$

La dernière intégrale $\left|\frac{x^3(1-x^2)}{(1+l^2x^2)^2}\right|_0^1$ est nulle aux deux limites et $\psi_1 = 0$. Il vient

$$\frac{1+3l^2}{4l^2}h_0 = \int_0^1 \frac{x^2\,dx}{1+l^2x^2} = \frac{l - \text{arc tang}\, l}{l^3}.$$

Or, pour un ellipsoïde de révolution, on a

$$h_0 = \frac{3 + l^2}{l^3} \operatorname{arc\,tang} l - \frac{3}{l^2}.$$

On en tire, en éliminant h_0,

$$F = \operatorname{arc\,tang} l - l \frac{3 + 13 l^2}{3 + 14 l^2 + 3 l^4} = 0.$$

Pour $l = 0$, l'expression du premier membre est nulle. Sa dérivée est

$$\frac{16 l^4 (l^2 - 1)(3 l^2 + 1)}{(1 + l^2)(3 + 14 l^2 + 3 l^4)^2}.$$

Pour $l < 1$, cette dérivée est d'abord négative, puis positive pour $l > 1$. La fonction F, nulle pour $l = 0$, est d'abord décroissante et négative, puis pour $l > 1$ elle devient croissante et tend vers $\frac{\pi}{2}$. Elle a donc une racine et une seule pour $l > 1$. Cette racine l est déterminée par l'équation $F = 0$. En tenant compte de la valeur correspondante de arc tang l, on obtient

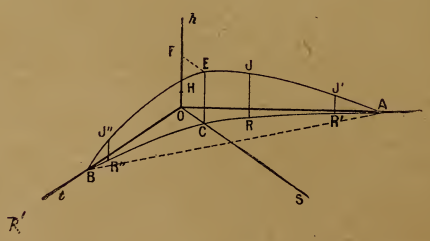
$$h_0 = \frac{4 l^2}{3 + 14 l^2 + 3 l^4}.$$

Les calculs donnent

$$l_0 = 1,395, \qquad t_0 = 0,3396, \qquad h_0 = 0,1871.$$

Pour qu'un ellipsoïde à trois axes soit possible comme figure d'équilibre, il faut donc que l'expression $\frac{\omega}{2\pi f \rho}$ soit inférieure

Fig. 19.



à 0,1871. Cette valeur est plus petite que celle qui correspond au

maximum de Maclaurin. C'est d'ailleurs un ellipsoïde de révolution pour lequel l'aplatissement e serait voisin de $\frac{2}{5}$,

$$\frac{a}{c} = 1,71, \qquad \frac{c}{a} = 0,586, \qquad e = \frac{a-c}{a} = 0,414.$$

La courbe *dans l'espace* (*fig.* 19) s'obtiendra en prenant un point R de la courbe précédente et en élevant une ordonnée $RJ = h = \varphi(s, t)$, valeur essentiellement positive :

a. h est symétrique en s et t. La courbe gauche est donc symétrique par rapport au plan hOS. Il suffira d'en construire la moitié. Partons de A, on a $t = 0$ et $s = 1$; h, qui contient s et t en facteur, est donc nul.

b. Quand s croît, h croît constamment jusqu'à ce que s atteigne la valeur t_0.

Pour $s = t$, on a $t_0 = 0,3396$; on obtient alors $h = 0,1871$. C'est le maximum de h que nous représentons par le point E.

Pour avoir les ellipsoïdes qui correspondent à une certaine valeur de ω, il suffit alors de chercher sur la courbe les points cotés $h = \frac{\omega^2}{2\pi f\rho}$. Le plan horizontal de cote h coupe la courbe en deux points J′ et J″ symétriques par rapport au plan hOS, auxquels correspondent sur le plan les deux points R′ et R″ symétriques par rapport à OS.

En résumé : 1° La condition d'existence des ellipsoïdes de Jacobi est

$$\frac{\omega^2}{2\pi f\rho} < 0,1871.$$

Tant que l'on a $h < h_0 = 0,187$, à chaque valeur de ω correspondent en apparence deux ellipsoïdes de Jacobi; mais ces deux ellipsoïdes sont identiques, car si la première solution est $s = s'$ et $t = t'$, la seconde sera $s = t'$ et $t = s'$. C'est le même ellipsoïde : on a seulement permuté les axes de coordonnées y et x. En effet, c ne change pas, a et b s'échangent entre eux; l'ellipsoïde a donc tourné de $\frac{\pi}{2}$ autour de son petit axe.

2° Si $h = 0,187$, il y a une solution pour laquelle $s = t = 0,3396$.

Les deux axes a et b deviennent égaux. L'ellipsoïde de Jacobi devient, dans ce cas limite, un ellipsoïde de révolution particulier que nous désignerons par E. C'est certainement en même temps un ellipsoïde de Maclaurin, puisque notre analyse nous a donné tous les ellipsoïdes de révolution qui peuvent exister comme figures d'équilibre. E a ceci de remarquable que cet ellipsoïde appartient aux deux séries d'ellipsoïdes, ceux de Maclaurin et ceux de Jacobi. Il établit le passage des uns aux autres.

3° Si l'on a $h > 0,187$, il n'y a plus d'ellipsoïdes de Jacobi possibles.

4° Que se passe-t-il si ω tend vers zéro ? Dans le cas des ellipsoïdes de Maclaurin, nous avons trouvé une sorte de disque très plat et de très grand rayon. Ici, nous avons une figure très différente. En effet, pour $\omega = 0$, on a $h = 0$, d'où $s = 0$ et $t = 1$, ou $t = 0$ et $s = 1$, ce qui donne le même ellipsoïde. Or, si s est nul, c est nul, a est infini, b est nul et $\frac{b}{c}$ tend vers un. Ainsi donc, quand ω tend vers zéro, le grand axe augmente indéfiniment, le petit et le moyen tendent vers zéro, pendant que leur rapport tend vers l'unité. La forme d'équilibre est alors une sorte d'aiguille sensiblement ronde et très allongée. La vitesse angulaire autour de Oz est très faible.

22. Tableau des résultats obtenus pour les ellipsoïdes :

$\omega = 0$	3 figures limites : la sphère, le disque aplati et l'aiguille allongée.
$\frac{\omega^2}{2\pi f\rho} < 0,187$	2 ellipsoïdes de Maclaurin. 1 ellipsoïde de Jacobi..
$\frac{\omega^2}{2\pi f\rho} = 0,187$	2 ellipsoïdes de Maclaurin. 1 ellipsoïde de Jacobi limite et de révolution.
$0,187 < \frac{\omega^2}{2\pi f\rho} < 0,224$	2 ellipsoïdes de Maclaurin.
$\frac{\omega^2}{2\pi f\rho} = 0,224$	1 ellipsoïde de Maclaurin limite.
$\frac{\omega^2}{2\pi f\rho} > 0,224$	Il n'y a plus de figure ellipsoïdale d'équilibre.

Au n° 19 (*fig.* 17), nous avons tracé la courbe qui représente les ellipsoïdes de Maclaurin en prenant pour variable l'expression l

définie ci-dessus. Pour rendre les résultats plus facilement comparables avec ceux relatifs aux ellipsoïdes de Jacobi, prenons la même variable s

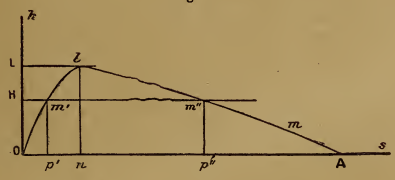
$$s = \frac{c^2}{a^2}, \qquad l = \sqrt{\frac{1-s}{s}}.$$

La formule (55), qui représente les ellipsoïdes de Maclaurin, devient

$$(64) \qquad h = \frac{\omega^2}{2\pi f \rho} = \sqrt{s}\,\frac{(1+2s)\operatorname{arc\,tang} l - 3\sqrt{s(1-s)}}{(1-s)\sqrt{1-s}}.$$

Comme la valeur de s reste comprise entre 0 et 1, la courbe se trouve également limitée (*fig.* 20). Pour $s = 1$, ce qui correspond

Fig. 20.



à $l = 0$ et à l'origine pour la courbe de la figure 17, on a $h = 0$ et le point A, cas de la sphère. Pour $s = 0$, c'est-à-dire $l = \infty$, on a $h = 0$ et le point zéro, cas du disque aplati. Le maximum $h_0 = 0,224$ a lieu pour $s = 0,135$, point l, cas limite. Pour une valeur H de h, on aura deux points m' et m'' de la courbe, qui déterminent deux valeurs p' et p'' de s et les deux aplatissements des deux ellipsoïdes de Maclaurin.

On peut représenter très clairement l'ensemble de ces résultats, pour les deux séries d'ellipsoïdes, au moyen d'un graphique analogue à celui de Poincaré (*Figures d'équilibre*, p. 163). Il suffit de reprendre la figure 18, projection horizontale de la courbe des ellipsoïdes de Jacobi. Les ellipsoïdes de Maclaurin y sont représentés par la bissectrice OS, ou $s = t$, qui est la projection sur le plan tO s de la courbe de la figure 20. Le point S représente le point A de la figure 20 pour $s = t = 1$. La distance à l'origine des points correspondants sur OS est seulement multipliée par $\sqrt{2}$, puisque OS

est ici la diagonale du carré dont le côté est $OA = 1$, mais leur ordonnée donne la vraie valeur de s.

L'ellipsoïde d'axes a, b, c est donc représenté dans le plan tOs par le point R de coordonnée s et t,

$$s = \frac{c^2}{a^2}, \qquad t = \frac{c^2}{b^2}.$$

Ces coordonnées représentent l'inverse de la racine carrée du grand axe a et de l'axe moyen b, si l'on prend l'axe de rotation c comme unité.

Suivons les ellipsoïdes de Maclaurin d'abord à partir de la sphère (*fig.* 18). Le point représentatif se déplace sur OS. Pour $\omega = 0$, on a la sphère $c = b = a$ et $s = t = 1$. Elle est représentée par le point S. Si l'aplatissement augmente, s et t diminuent : le point figuratif se rapproche de l'origine, sur la bissectrice, dans la direction SO. Suivons ensuite les ellipsoïdes de Maclaurin très aplatis : s et t voisins de zéro; pour $\omega = 0$, point zéro. Si la vitesse augmente, l'aplatissement diminue et s augmente. Le point figuratif s'éloigne de zéro sur la bissectrice. Les deux points représentatifs se rencontrent au point D pour lequel on a $s = 0,135$, la valeur limite de h étant $h_0 = 0,224$.

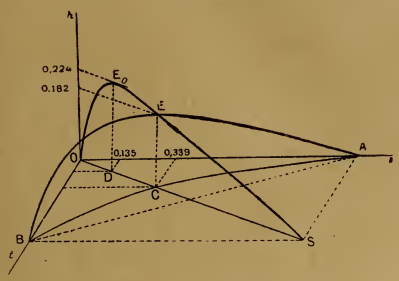
La courbe des ellipsoïdes de Jacobi se projette en ABC. Le point C représente l'ellipsoïde de bifurcation, qui est à la fois de Maclaurin et de Jacobi, ellipsoïde E. Si, à partir de la vitesse correspondant à t_0, la vitesse de l'ellipsoïde de Jacobi diminue, l'aplatissement de sa section équatoriale augmente. Les valeurs de s et de t diffèrent de plus en plus. Le point figuratif décrit la courbe CB ou CA. A la limite, pour une aiguille allongée, $s = 1$ ou $t = 1$, on a le point A ou le point B.

Cette représentation graphique des résultats sur le plan peut être complétée par sa représentation dans l'espace. Il suffit de prendre la cote h au-dessus du plan tOs représentée par la figure 18, ou encore de compléter la figure 19, qui représente les jacobiens, par la courbe de la figure 20, qui représente les maclaurins, et qui vient se placer dans le plan bissecteur de tOs, en OE_0ES (*fig.* 21).

Les deux courbes AEB et OES décrites par le point figuratif dans l'espace fournissent alors une représentation graphique complète des résultats acquis pour ce problème. En particulier, la

courbe plane dont la projection est la bissectrice de sOt, est analogue à la courbe étudiée dans le cas précédent (*fig.* 20), sans lui être identique, comme on l'a vu, l'unité choisie pour les abscisses n'étant pas la même et étant égale à celle de la figure 20 multipliée par $\sqrt{2}$.

Fig. 21.



Il y a deux points remarquables des courbes de l'espace : le point E, dont la projection est C, où $EC = 0,187$; et le point E_0, dont la projection est D, où $E_0D = 0,224$. La courbe décrite par le point représentatif des ellipsoïdes de Jacobi passe par E. De plus, quand s ou t tendent vers zéro, et par conséquent quand les aplatissements deviennent infinis, h tend vers zéro. Ainsi, la courbe de l'espace tend vers les points A ou B du plan horizontal pour h voisin de zéro.

Nous avons, dans cette étude des figures ellipsoïdales d'équilibre, un premier exemple de deux idées introduites par Poincaré :

1° *Position d'équilibre de bifurcation.* — Le point E représente une position d'équilibre de bifurcation car on peut y arriver en suivant deux chemins différents : par des ellipsoïdes de Maclaurin ou par des ellipsoïdes de Jacobi. On peut suivre pour cela deux séries linéaires de positions d'équilibre, c'est-à-dire deux courbes à un seul paramètre qui ont ce point commun.

Inversement, en partant de E, les ellipsoïdes d'équilibre infiniment voisins sont de deux sortes : il y en a deux de Maclaurin et un de Jacobi. On reconnaîtra, en traversant le point E, qu'on reste

dans la même série d'ellipsoïdes si les dérivées des axes restent continues.

2° *Position d'équilibre limite.* — Le point E_0 représente une de ces positions. Quand on est arrivé en E_0, si l'on continuait à faire croître ω, la figure ellipsoïdale cesserait d'exister, la figure d'équilibre ne pourrait plus être un ellipsoïde.

23. **Discussion en prenant le moment de rotation comme paramètre.** — Nous appelons ainsi la somme des moments des quantités de mouvement $\mu = I\omega$ par rapport à l'axe de rotation. On peut considérer ce moment comme donné, au lieu de la vitesse de rotation. Laplace et Liouville expliquent que c'est là le véritable problème qui se pose en Mécanique céleste. Dans l'hypothèse de Laplace, en effet, la planète est à l'origine une masse gazeuse de grande étendue. Supposons-la soustraite aux actions extérieures : il s'y produit des mouvements internes, des courants plus ou moins réguliers. Alors, la somme des moments des quantités de mouvements prise par rapport à des axes passant par le centre de gravité de la masse est constante. Le moment cinétique μ a une direction et une grandeur constantes. Le plan perpendiculaire à ce moment est le plan du maximum des aires.

Peu à peu, les mouvements internes se régularisent et s'égalisent par le frottement (ils ne sont pas encore rigoureusement égalisés pour le Soleil, Jupiter et Saturne). La masse gazeuse peut tendre alors à prendre un mouvement d'ensemble et à devenir une figure permanente en mouvement. Si nous faisons l'hypothèse, assez éloignée de la réalité, que la masse est homogène, le mouvement permanent sera nécessairement une rotation autour de l'axe $G\mu$.

Ainsi on peut supposer qu'au bout d'un temps très long le corps tournera autour de l'axe $G\mu$ et la valeur de μ n'aura pas changé. En choisissant μ comme paramètre au lieu de ω, Laplace a fait les calculs dans le cas des ellipsoïdes de révolution et Liouville pour les ellipsoïdes de Jacobi (*Journal de Mathématiques*, t. XVI).

Ellipsoïdes de Maclaurin. — Nous avons alors

$$I = \frac{2}{5} M a^2, \qquad \frac{\omega^2}{2\pi f \rho} = \frac{\mu^2}{2\pi f \rho I^2} = \frac{25\mu^2}{4 M^2 a^4} \frac{1}{2\pi f \rho}.$$

De la formule (56), qui donne le rayon équatorial a en fonction de l et de la masse M, tirons la valeur de a, la formule (55) donnant l en fonction de ω deviendra

$$(67)\qquad \frac{50\mu^2}{3fM^3}\left(\frac{4\pi\rho}{3M}\right)^{\frac{1}{3}} = 4(1+l^2)^{\frac{2}{3}}\left[\frac{(3+l^2)\operatorname{arc\,tang} l - 3l}{l^3}\right]$$

ou

$$k = 4h(1+l^2)^{\frac{2}{3}}.$$

Dans cette équation, le premier membre est donné; nous le désignons par k et nous construisons la courbe $k = \varphi(l)$.

Pour $l = 0$, la courbe a la même allure que la courbe h précédente. Pour les grandes valeurs de l, au contraire, la valeur du terme principal est $l^{\frac{4}{3}}$, de sorte que k augmente indéfiniment avec l sans passer par un maximum. D'ailleurs $\frac{k}{l}$ tend vers zéro et la courbe prend une allure parabolique pour l très grand, avec la concavité tournée vers Ol.

Pour achever l'étude de cette courbe, on prend la dérivée

$$(67')\quad \frac{dk}{dl} = \frac{4}{3}(1+l^2)^{-\frac{1}{3}}\left[\operatorname{arc\,tang} l + 9\frac{(2l^2+3)^2}{l^4}\left(\frac{l^3+2l}{2l^2+3} - \operatorname{arc\,tang} l\right)\right].$$

Le dernier facteur s'annule pour $l = 0$ et sa dérivée est toujours positive. Ce terme est donc toujours croissant et, par conséquent, positif. Il en est de même de la dérivée $\frac{dk}{dl}$ et l'ordonnée de la courbe $k = \varphi(l)$ est constamment croissante.

On peut encore écrire

$$\frac{dk}{dl} = \frac{4}{3}(1+l^2)^{-\frac{4}{3}}[4lh + 3(1+l^2)h'],$$

et pour $l = 0$, on a

$$h = h' = 0, \qquad \text{d'où} \qquad k' = 0.$$

La courbe est tangente à l'axe l à l'origine.

Il est, dès lors, facile d'achever la discussion du problème. On se donne μ et l'on en déduit k. A chaque valeur de k correspondra une valeur et une seule de l, un seul ellipsoïde d'équilibre. Il n'y a donc pas de position d'équilibre limite, mais il y a toujours un

ellipsoïde d'équilibre, quelles que soient les conditions initiales. Si k est très petit, on aura des formes très voisines de la sphère.

Pour la valeur limite de ω dans la discussion précédente, où l'on avait $l_0 = 2,53$ et $h_0 = 0,224$, on a ici $k_0 = 3,40$. On obtient l'ellipsoïde E_0, qui n'est plus un ellipsoïde limite mais un ellipsoïde quelconque, en considérant le moment de rotation comme paramètre.

Mais l'expression k se compose de deux quantités qui peuvent être considérées séparément comme variables : le moment de rotation μ et la densité ρ. Si on laisse ρ constant, k représente la variation par rapport à μ. Si on laisse μ constant, k représente la variation par rapport à ρ.

Si nous considérons d'abord la densité comme constante et que l'on fasse croître progressivement le moment de rotation, en communiquant à l'ensemble une énergie extérieure, alors k croît indéfiniment. Le point figuratif s'éloigne indéfiniment sur la courbe. Par conséquent, l et l'aplatissement augmentent constamment. L'aplatissement augmente même de plus en plus vite, à cause de l'allure parabolique de la courbe. A partir de E_0 le moment d'inertie I, qui résulte de cet aplatissement, augmente plus vite que le moment de rotation $\mu = I\omega$, dont dépend la valeur de k. Alors ω doit diminuer à partir de cet ellipsoïde E_0, comme on l'a vu dans la première discussion.

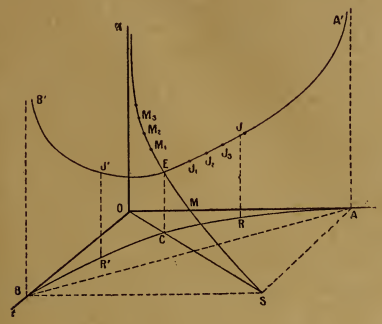
Considérons au contraire la densité comme variable et le moment de rotation comme constant. C'est le cas de la nature où un astre se refroidit et se contracte, en conservant la même quantité de mouvement, cette contraction ne faisant intervenir que les forces intérieures. Au début, l'astre est très dilaté, ρ est très petit, k et l également. La masse est très peu aplatie. On voit que k et l, et par conséquent l'aplatissement, augmenteront indéfiniment avec ρ. Mais dans la contraction, la densité tend vers une limite, celle du corps à 0° (température absolue), et la masse tendra vers une forme ellipsoïdale limite E_1.

Remplaçons, dans la formule (67), l en fonction de s; comme dans la discussion précédente, on a

$$k = \frac{4}{s^{\frac{2}{3}}} h = \frac{4}{\sqrt[6]{s}} \frac{(1+2s)\operatorname{arc\,tang} l - 3\sqrt{s(1-s)}}{(1-s)\sqrt{1-s}}.$$

La courbe est représentée en SEM_1 (*fig.* 22). Les valeurs de k sont portées sur l'axe vertical. Pour $s = 1$, on a $k = 0$; c'est le

Fig. 22.



point S. Quand s décroît, k croît constamment et l'ordonnée de la courbe croît asymptotiquement à l'axe vertical.

Ellipsoïdes de Jacobi. — On a, dans ce cas,

$$I = \frac{M}{5}(a^2 + b^2) = \frac{Mc^2}{5}\left(\frac{1}{s} + \frac{1}{t}\right) = \frac{Mc^2}{5}\,\frac{s+t}{st},$$

$$\omega^2 = \frac{\mu^2}{I^2} = \frac{25\mu^2}{M^2c^4}\left(\frac{st}{s+t}\right)^2.$$

En exprimant c en fonction de s et t d'après (63), on obtient

$$(68) \qquad \frac{\omega^2}{2\pi f\rho} = \frac{50\mu^2}{3fM^3}\left(\frac{4\pi\rho}{3M}\right)^{\frac{1}{3}}\frac{(st)^{\frac{4}{3}}}{(s+t)^2} = \varphi(s, t) = h.$$

En représentant par l la même expression que ci-dessus, on a finalement les deux équations de conditions, où $\psi(s, t)$ a la même valeur que précédemment, et qui déterminent s et t en fonction de l :

$$(69) \qquad k = \frac{(s+t)^2}{(st)^{\frac{4}{3}}}\varphi(s, t), \qquad \psi(s, t) = 0.$$

Ces équations (69) remplacent les équations (61′) et (62′) du numéro précédent.

Discussion. — μ étant donné, k est donné. Combien y a-t-il de solutions répondant à une valeur de l?

Cette discussion est analogue à celle du numéro précédent. La fonction ψ, qui est indépendante de ω et de ρ, reste la même. Elle détermine toujours une valeur et une seule de s pour chaque valeur de t. La courbe représentative, projection sur le plan sOt de la courbe de l'espace, reste la même.

Nous pouvons écrire la relation (69) entre h et k, d'après les notations de Radau, sous la forme

$$k = p^2 q^{-\frac{4}{3}} h;$$

on obtient

$$q^{\frac{4}{3}} dk = 2ph\, dp - \frac{4}{3} p^2 \frac{h}{q} dq + p^2 dh.$$

En remplaçant dp et dh par leurs valeurs obtenues dans la discussion précédente, il vient

$$q^{\frac{4}{3}} \frac{dk}{dr} = (A_0 + A) q + \frac{1}{4} q B - A_0 r \frac{dq}{dr} - (4A + B) \frac{q + r}{3} \frac{dq}{dr}.$$

Les termes A_0, A, B sont positifs et l'on a démontré

$$\frac{dq}{dr} < 0, \qquad \text{donc} \qquad \frac{dk}{dr} > 0.$$

dk a le signe contraire de dh. Ainsi k variera en sens inverse de h par rapport à r, et par conséquent par rapport à s et t.

On a, de même que dans la première discussion pour $s = t = t_0$ et $r = 0$,

$$dp = dq = dr = dh = dk = 0.$$

La fonction k est donc toujours croissante avec $r = (s - t)^2$, et dk s'annule pour $r = 0$. Donc k croît toujours pour s variant à partir de $s = t = t_0$ vers 0 ou 1. Elle est minimum pour $s = t = t_0$.

D'ailleurs, en remplaçant dr en fonction de ds et dt, on aurait

$$\frac{dk}{ds} = 2(t - s)\left(\frac{dt}{ds} - 1\right)\frac{dk}{dr}, \qquad \frac{dt}{ds} < 0;$$

k est décroissant pour $s < t$, croissant pour $s > s$, et minimum pour $s = t = t_0$. Il n'a qu'une valeur correspondant à chaque

couple de valeurs de s et t. La valeur correspondant au minimum k_0 est

$$k_0 = 4\, t_0^{-\frac{2}{3}} h_0 = 1,537.$$

Enfin, pour $s = 0$ ou $t = 0$, on a $k = \infty$. La fonction croît indéfiniment avec

$$k = \frac{1}{s^{\frac{4}{3}}} \int_0^\infty \frac{x\, dx}{(1+x)^2}.$$

La courbe qui traduit cette variation est représentée figure 22. On construit d'abord la courbe plane $\psi(s, t) = 0$, qui reste la même, puisque cette expression est indépendante de ω, courbe ACB. Puis on construit la courbe A'EB' qui représente les variations de k en fonction de s et t. On étudie la variation de k quand R va de A en B. Nous remarquons d'abord que k est symétrique par rapport à s et t. Donc kOS est un plan de symétrie.

En A on a $s = 1$ et $t = 0$, donc k est infini. La branche de courbe est asymptote à la parallèle à Ok menée par A. Quand t croît jusqu'à la valeur $t = s = 0,339$, alors $\frac{dk}{dt}$ reste constamment négatif et k décroît constamment jusqu'à $t = t_0$. Pour cette valeur, on a $k = \text{EC} = 1,537$. Il y a, en général, une seule solution. Les deux points où le plan horizontal de cote k coupe la courbe gauche donnent deux ellipsoïdes identiques.

Si $k > 1,537$, 1 ellipsoïde de Jacobi.

Si $k = 1,537$, 1 ellipsoïde de Jacobi limite et de révolution.

Si $k < 1,537$, plus d'ellipsoïde de Jacobi.

Le point E, est pour l'ensemble des ellipsoïdes de Jacobi, une position d'équilibre limite, mais par rapport à l'ensemble des ellipsoïdes d'équilibre, c'est une position de bifurcation.

Si l'on fait croître le moment μ, ou la densité ρ, le point figuratif partant de S va suivre la courbe des ellipsoïdes de Maclaurin et remonter jusqu'en E. On voit comment le point E appartient aux deux séries linéaires d'ellipsoïdes et représente une figure d'équilibre de bifurcation. Ainsi donc, si l'on cherche les ellipsoïdes d'équilibre infiniment voisins de E et répondant à de petites variations de ω, on trouve soit des ellipsoïdes de Maclaurin, soit des ellipsoïdes de Jacobi. Pour une valeur de μ ou de ρ, plus grande

que celle qui correspond à E, on aura deux figures ellipsoïdales d'équilibre possibles, l'une de révolution, l'autre à trois axes.

Il faut retenir de l'ensemble de cette discussion que *si l'on se donne le moment de rotation, il y a toujours une figure ellipsoïdale d'équilibre possible*, ou deux au plus.

Ces résultats classiques ont été longtemps les seuls résultats connus. Comme on l'a vu, Tait et Thomson ont bien donné quelques indications nouvelles, mais il faut arriver à Poincaré pour trouver de nouveaux résultats et de nouvelles figures d'équilibre.

23 *bis*. **Discussion en considérant le moment de rotation comme constant et le grand axe comme variable.** — Dans la discussion précédente, l'expression k contient le moment de rotation μ et la densité ρ. Or, on doit faire varier ρ de o à l'infini pour obtenir tout le champ de la variation. Il serait plus intéressant d'avoir la variation du grand axe de l'ellipsoïde dans la contraction. Nous allons voir qu'il tend vers une valeur finie (A. Véronnet, *Comptes rendus*, t. 169, p. 328, et *Journal de Mathématiques*, 1919).

Pour les maclaurins on a, d'après la formule (56),

$$\left(\frac{4\pi\rho}{3M}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{(1+l^2)^{\frac{1}{6}}}{a}$$

d'où, en substituant dans (67),

$$g = \frac{5\rho}{3fM^2}\frac{\mu^2}{a} = 4h\sqrt{1+l^2} = 4\sqrt{1+l^2}\,\frac{(3+l^2)\operatorname{arc\,tang} l - 3l}{l^3}.$$

C'est cette expression $g = 4h\sqrt{1+l^2}$ que nous allons considérer à la place de k.

Pour $l = 0$, on a $g = 0$ comme $h = 0$ et pour $l = \infty$, on a $g = 2\pi$. En prenant la dérivée par rapport à l, on obtient

$$\frac{dg}{dl} = 4\,\frac{9+7l^2}{l^4\sqrt{1+l^2}}\left(\frac{9+4l^2}{9+7l^2}\,l - \operatorname{arc\,tang} l\right).$$

Cette expression est toujours positive et g est toujours croissant de o à 2π, quand l croît de o à ∞. En effet, pour $l = 0$, l'expression entre crochets tend vers $\frac{8}{135}l^5$ en négligeant l^7 et sa dérivée

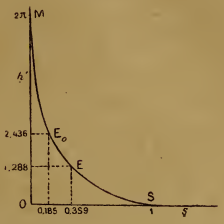
qui est

$$\frac{9+4l^2}{9+7l^2}-\frac{54l^2}{(9+7l^2)^2}-\frac{1}{1+l^2}=\frac{24l^4+28l^6}{(9+7l^2)^2(1+l^2)}$$

reste toujours positive.

Si l'on exprime l en fonction de s et que l'on prenne s comme variable, la variation sera représentée par SEM (*fig.* 23). Pour $l=0$

Fig. 23.



on a $s=1$ et le point S qui représente la sphère. Pour $l=\infty$, on a $s=0$ et le point M où $g=2\pi$ qui représente le disque aplati. L'ellipsoïde E_0 a pour coordonnées $s=0,135$ et $g=2,436$.

Pour de faibles aplatissements nous avons, en développant et négligeant l^4,

$$g=4h\sqrt{1+l^2}=\frac{16}{15}l^2\ldots \qquad \text{ou} \qquad g=\frac{32}{15}e+\ldots.$$

La valeur de g est sensiblement égale à $2e$ pour de faibles aplatissements. En tenant compte de la valeur ci-dessus de g, fonction de μ et de a, on peut écrire, pour de faibles aplatissements,

$$\frac{\mu^2}{ae}=\text{const.} \qquad \text{ou} \qquad ae=\text{const.}$$

si l'on fait μ constant.

Ainsi, pour de *faibles aplatissements* et dans le cas où le moment de rotation reste constant, l'aplatissement varie en raison inverse du rayon équatorial et réciproquement. Pour la Terre, par exemple, il faudra qu'elle se contracte jusqu'à un rayon moitié moindre pour que son aplatissement devienne double de ce qu'il est actuellement. Il serait encore très petit et voisin de $\frac{1}{150}$. La densité du

globe serait alors huit fois plus grande, soit 44 fois celle de l'eau. L'aplatissement de la Terre ne pourrait donc pas même atteindre cette limite.

Soient M', r, ω' la masse, la distance et la vitesse de rotation de la Lune, le moment de rotation du système Terre-Lune sera

$$\mu' = I'\omega' = \frac{2}{5} M a^2 \omega + M' r^2 \omega' = 4,82\mu.$$

Supposons les deux masses réunies en une seule avec leur quantité de mouvement totale. On peut négliger l'accroissement de I et de a. On aura

$$\frac{\mu^2}{e} = \text{const.}, \qquad \frac{1}{e'} = \frac{297}{4,82^2} = 12,4.$$

L'aplatissement ne serait encore que de $\frac{1}{12}$, de l'ordre de celui de Jupiter. Nous serions très loin d'un dédoublement possible, même avec un rayon moitié moindre. En supposant la Terre homogène, on aurait

$$\frac{1}{e_1} = 231 \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{e'} = 10,0.$$

Considérons, au contraire, de *très grands aplatissements*, avec μ constant; la valeur de g montre que a, qui varie en sens inverse, tend avec g vers une limite qui est

$$a_0 = \frac{25}{3fM^3} \frac{\mu^2}{\pi}.$$

Le rayon équatorial décroît donc constamment dans la contraction jusqu'à la valeur a_0, atteinte par un disque aplati de densité infinie.

On a obtenu plus haut pour les faibles aplatissements

$$\frac{25}{3fM^3} \frac{\mu^2}{a} = \frac{16}{15} e, \qquad e = \frac{5}{4} \varphi.$$

On a donc pour la Terre, supposée homogène, pour que la limite 2π soit applicable,

$$\frac{a}{a_0} = \frac{15}{16} \frac{\pi}{e} = 680.$$

Le rayon de la Terre à la limite de contraction devrait être ainsi

près de 700 fois plus petit. Notre globe serait réduit à un disque de $9^{km},4$ de rayon avec densité infinie.

On a, d'ailleurs,

$$\mu = I\omega = \frac{2}{5} M a^2 \omega = \text{const.}$$

La vitesse de rotation varierait en raison inverse de a^2. Elle serait 462 000 fois plus grande qu'actuellement. Le disque ferait 5,35 tours par seconde.

On a pour l'attraction dans le plan équatorial, à la distance r où l'attraction est F (elle est proportionnelle à r comme la force centrifuge elle-même),

$$\frac{F}{r} = 2\pi f \rho \frac{1 + l^2}{l^3}\left(\text{arc tang}\, l - \frac{l}{1 + l^2}\right),$$

et, d'ailleurs, on a

$$\frac{\omega^2}{2\pi f \rho} = \frac{(3 + l^2)\,\text{arc tang}\, l - 3\,l}{l^3}.$$

Le *rapport de la force centrifuge à l'attraction* dans le plan équatorial est donc

$$\frac{\omega^2 r}{F} = \frac{(3 + l^2)\,\text{arc tang}\, l - 3\,l}{(1 + l^2)\,\text{arc tang}\, l - l} = 1 - \frac{2\,(l - \text{arc tang}\, l)}{(1 + l^2)\,\text{arc tang}\, l - l}.$$

Le dernier terme est égal à 1 pour $l = 0$, cas de la sphère. Il est égal à 0 pour $l = \infty$, cas du disque aplati. Il est toujours décroissant. La force centrifuge est donc toujours plus petite que l'attraction dans un ellipsoïde homogène de révolution en équilibre. [Il en est de même, d'ailleurs, pour un ellipsoïde hétérogène. *Voir* A. Véronnet, *Rotation de l'ellipsoïde hétérogène et figure exacte de la Terre* (*Journ. de Math.*, 1912, p. 378).]

Ainsi, la force centrifuge tend à équilibrer l'attraction à l'équateur à mesure que l'ellipsoïde s'aplatit. Il y aurait équilibre entre ces deux forces à la limite, quand on a un disque aplati. Les molécules, à la surface et à l'intérieur n'exercent plus aucune pression les unes sur les autres.

Pour les ellipsoïdes de Jacobi à trois axes, on obtient de même

la formule suivante en remplaçant, dans k, ρ en fonction de a

$$g = \frac{50}{3fM^3}\frac{\mu^2}{a} = k\frac{s^{\frac{4}{3}}}{t^{\frac{1}{6}}} = \frac{(s+t)^2}{st}\frac{h}{\sqrt{t}}.$$

On ne peut pas démontrer que cette expression, à partir de $s_0 = t_0$, est toujours décroissante comme h ou toujours croissante comme k. Les calculs numériques montrent que cette expression est d'abord décroissante, passe par un minimum, puis redevient croissante.

Elle tend logarithmiquement vers l'infini quand s tend vers o. En effet, dans l'expression de g faisons $s = 0$ et $t = 1$, on a

$$g = \frac{(s+t)^2}{\sqrt{t}}\int_0^\infty \frac{x(1+x)\,dx}{\Delta^3} = \int_0^\infty \frac{x\,dx}{(1+x)^2},$$

expression qui donne immédiatement une valeur infinie pour g.

Comme g augmente indéfiniment, le grand axe a, qui varie en raison inverse de g, tendra vers o. L'ellipsoïde de Jacobi ne tendra pas vers une figure limite. Il prendra la forme d'un ellipsoïde de plus en plus allongé, mais de dimensions indéfiniment décroissantes.

On peut obtenir de g une expression approchée pour s très petit. En faisant $t = 1$ et conservant s, on a

$$g = \int_0^\infty \frac{x}{(1+x)^2}\frac{dx}{(1+sx)^{\frac{3}{2}}}.$$

Posons

$$z^2 = \frac{s}{1+sx}, \qquad \text{d'où} \qquad x = \frac{s-z^2}{sz^2}.$$

On peut écrire, à un terme très petit en s près,

$$x = \frac{s-(1-s)z^2}{sz^2} = \frac{1-l^2z^2}{z^2}, \qquad 1+l^2 = \frac{1}{s} = \frac{a^2}{c^2}.$$

On obtient

$$g = \frac{2}{\sqrt{s}}\int_0^{\sqrt{s}} \frac{l^2z^2}{1-l^2z^2}\,dz = \left| \mathrm{L}\frac{1+lz}{1-lz}\right|_0^{\sqrt{s}} - 2 = \mathrm{L}\frac{4}{s} - 2.$$

en faisant dans les calculs de la valeur aux limites,

$$l\sqrt{s} = \sqrt{1-s} = 1 - \frac{1}{2}s \ldots.$$

L'attraction à l'extrémité du grand axe a, dans un ellipsoïde à trois axes, est donnée au n° 20. Si l'on fait dans cette formule $\lambda = c^2 x$ et que l'on introduise s et t, comme il est indiqué pour ω^2, on obtient

$$P = -\frac{X}{a} = 2\pi f\rho \int_0^\infty \frac{dx}{(1+sx)\Delta}.$$

En faisant ici $t = 1$ et la même transformation de z^2 pour s très petit, on obtient

$$P = -\frac{X}{a} = 2\pi f\rho s\left(L\frac{4}{s} - 2\right).$$

On a bien encore ici à la limite

$$\frac{\omega^2 a}{-X} = 1.$$

C'est-à-dire qu'il y a égalité entre la force centrifuge et l'attraction.

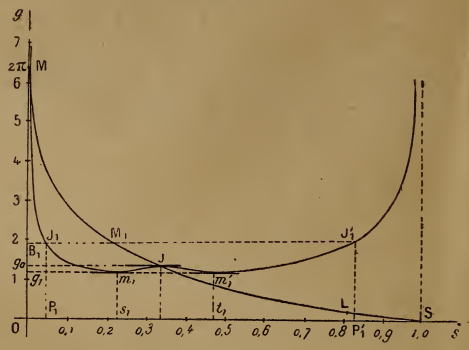
G.-H. Darwin a calculé la valeur de h correspondant aux ellipsoïdes de Jacobi pour différentes valeurs de s. On peut en déduire celles de g et de a, puis de b et de c. Ces valeurs sont indiquées dans le tableau suivant :

s....	0,340	0,296	0,250	0,178	0,117	0,066	0,030	0,008	0
t....	0,340	0,384	0,438	0,536	0,640	0,748	0,853	0,944	1
ρ....	1,00	1,06	1,21	2,04	4,73	16,2	88,5	1370	∞
h...	0,187	0,186	0,181	0,166	0,141	0,107	0,066	0,026	0
k...	1,537	1,561	1,629	1,935	2,565	3,360	6,812	17,02	∞
g...	1,276	1,220	1,178	1,208	1,350	1,643	2,177	3,368	∞
a...	1,000	1,046	1,083	1,056	0,945	0,776	0,586	0,379	0
b...	1,000	0,918	0,819	0,609	0,404	0,184	0,108	0,034	0
c....	0,583	0,569	0,542	0,446	0,323	0,160	0,102	0,033	0

La figure 24 donne la courbe des g avec s comme abscisse. C'est la projection sur le plan gOs de la courbe de l'espace. Les valeurs de s pour $s > t_0$ sont les mêmes que celle du tableau. La courbe SJM est celle des Maclaurin, limitée en M pour $g = 2\pi$. La

courbe des Jacobi, à partir du point de bifurcation J, décroît jusqu'à un minimum g_1 en m_1, et m'_1, puis croît indéfiniment.

Fig. 24.



Si l'on a $g_0 < g < 2\pi$, par exemple le point B_1, la parallèle à OS rencontre la courbe des Maclaurin en M_1, ce qui détermine l'ellipsoïde de révolution qui est figure d'équilibre. Elle rencontre également la courbe des Jacobi en deux points J_1 et J'_1 qui déterminent les deux aplatissements

$$s_1 = OP_1 \qquad \text{et} \qquad t_1 = OP'_1$$

de l'ellipsoïde de Jacobi qui est également figure d'équilibre.

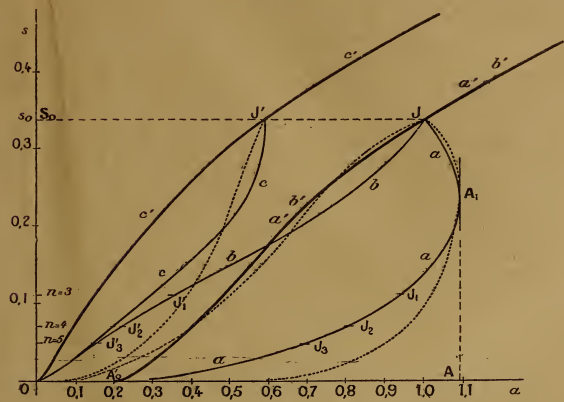
Si l'on a $g > 2\pi$, il y a toujours un Jacobi comme figure d'équilibre, il n'y a plus de Maclaurin. Si $g < g_1$, il y a un Maclaurin et plus de Jacobi.

Enfin, si l'on a $g_1 < g < g_0$, la courbe des Jacobi est rencontrée en quatre points. Il y a deux ellipsoïdes de Jacobi et un de Maclaurin comme figure d'équilibre.

La figure 25 donne les courbes représentatives des axes des Maclaurin en traits forts et des trois axes de Jacobi en traits fins, à partir du point de bifurcation JJ'. Les valeurs de s sont en ordonnées, celles des axes en abscisses. Le grand axe a', b' du Maclaurin décroît jusqu'à une valeur limite A'_0, celle du disque. Tous les autres tendent vers O. Au point J, le grand axe des

Jacobi croît d'abord jusqu'à un maximum A, pour décroître ensuite. Les deux axes b et c se rejoignent pour tendre vers O.

Fig. 25.



Les courbes en pointillé représentent la variation des mêmes axes en fonction de $\frac{1}{\rho}$ au lieu de s, c'est-à-dire en fonction de la contraction au lieu de l'aplatissement. L'allure des courbes reste la même. Ceci était à prévoir, car ρ varie toujours en raison inverse de s d'après l'étude de k.

Remarque. — Le point figuratif correspondant à la Terre, en lui ajoutant la Lune et son moment de rotation, serait le point L (*fig.* 24), au voisinage de $s = 0,8$. Il est très loin des points de bifurcation. Il l'était plus encore dans le passé, et la Lune n'a pas pu se former par dédoublement.

On peut d'ailleurs, au moyen de l'expression de g, établir une conditition pour qu'un système double puisse provenir par rupture d'une masse unique. En désignant par r_1 et r_2 la distance des masses M et m à leur centre de gravité, et en considérant les orbites comme circulaires

$$r = r_1 + r_2, \qquad \mathrm{M}r_1 = mr_2 \qquad \text{ou} \qquad (\mathrm{M} + m)r_1 = mr,$$

on a

$$\mu = \mu_1 + \mu_2 = (\mathrm{M} r_1^2 + m r_2^2)\omega = \mathrm{M} r_1 \omega r.$$

En remplaçant ici r_1 par sa valeur en fonction de r, on a

$$\mu = \frac{\mathrm{M} m'}{\mathrm{M} + m} \omega r^2.$$

La loi de Képler peut s'écrire

$$\omega^2 r^3 = f(\mathrm{M} + m).$$

Il vient alors, en désignant le rapport des masses par α,

$$\frac{\mu^2}{r} = f \frac{\mathrm{M}^2 m^2}{\mathrm{M} + m} = \frac{\alpha^2}{1 + \alpha} f \mathrm{M}^3,$$

expression du moment de rotation indépendante de ω. Cette valeur portée dans g (p. 76) donne

$$g = \frac{50}{3} \frac{\alpha^2}{1 + \alpha} \frac{r}{a}.$$

Il est facile de voir que dans le fractionnement d'un ellipsoïde, r étant la distance du centre de gravité des deux composantes, on a $\frac{3}{4} a \leqq r \leqq a$ suivant que le fractionnement se produirait au milieu, à une extrémité ou en un point intermédiaire. Considérons le grand axe de l'ellipsoïde de bifurcation E qui donne naissance aux figures piriformes. Comme il faut que la masse se contracte encore pour arriver à une rupture, on a nécessairement $r < a$. On a de plus $g = 1,35$ pour cet ellipsoïde de bifurcation. On en déduit

$$\frac{\alpha^2}{1 + \alpha} = \frac{3g}{50}, \qquad \alpha = \frac{m}{\mathrm{M}} = 0,327.$$

Le rapport des composantes doit être plus grand que $\frac{1}{3}$. Leurs masses doivent être du même ordre et assez voisines.

Au moment de la rupture, il y a égalité entre la force centrifuge et l'attraction. Les orbites doivent être circulaires. Dans le cas général, on admet qu'elles ne le sont pas. Le moment de rotation μ serait défini, au lieu de ωr^2, par la constante des aires. On aurait, a_1 et a_2 étant les grands axes,

$$\mu = \frac{2\pi}{\mathrm{T}} (\mathrm{M} a_1 b_1 + m a_2 b_2) = \frac{2\pi \sqrt{1 - e^2}}{\mathrm{T}} (\mathrm{M} a_1^2 + m a_2^2).$$

La même transformation que ci-dessus donnerait

$$\mu = \frac{\mathrm{M}m}{\mathrm{M}+m}\,\frac{2\pi a'^2\sqrt{1-e^2}}{\mathrm{T}}, \qquad a' = a_1 + a_2.$$

La loi de Képler donne ensuite

$$4\pi^2\frac{a'^3}{\mathrm{T}^2} = f(\mathrm{M}+m), \qquad g = \frac{50}{3}\,\frac{\alpha^2}{1+\alpha}\,\frac{a'(1-e^2)}{a}.$$

C'est une formule analogue à la précédente, où r est remplacé par $a'(1-e^2)$.

Pour qu'il y ait dédoublement, il faut que la force centrifuge tende à égaler l'attraction avant que l'une des dimensions de la figure d'équilibre devienne nulle. Dans les ellipsoïdes de Maclaurin, une seule dimension devient nulle à la limite pour le disque aplati. Dans les ellipsoïdes de Jacobi, les trois dimensions deviennent nulles quand la force centrifuge tend à égaler l'attraction. En bifurquant vers les Jacobi, on s'éloigne donc de la condition. Il semble qu'il faille chercher du côté des ellipsoïdes de bifurcation des Maclaurin, que nous étudions plus loin, dont le premier aboutirait à l'anneau de Plateau [A. Véronnet, *Variation du grand axe dans les figures ellipsoïdales d'équilibre* (*Journal de Mathématiques*, 1919)].

Remarque. — On a supposé ici que la masse tourne tout d'une pièce, la vitesse de rotation ω étant constante. Si l'on suppose au contraire que la vitesse de rotation n'est pas la même en tous les points, l'équation différentielle de la page 46, qui traduit les conditions de l'équilibre hydrostatique, montre que le dernier terme $\omega^2(x\,dx + y\,dy)$ doit être une différentielle exacte, comme les deux autres. Pour que l'équilibre hydrostatique soit conservé, il faut alors que ω soit uniquement fonction de la distance à l'axe de rotation. Elle est la même pour toutes les molécules situées à la même distance de l'axe. Les figures d'équilibre ne peuvent plus être des ellipsoïdes, d'après la discussion du numéro suivant, où ω^2 serait une fonction de x^2+y^2. Cette démonstration subsiste dans le cas d'une masse hétérogène (A. Véronnet, *Comptes rendus*, t. 183, 1926, p. 949).

CHAPITRE IV.

FONCTIONS DIVERSES. CALCULS ET RÉSULTATS PRÉLIMINAIRES.

24. **Choix d'unités de Poincaré.** — Pour simplifier, Poincaré fait dans ses Mémoires $f = 1$ et $\rho = 1$. Il faut étudier d'un peu plus près le choix d'unités auquel ces simplifications correspondent. Nous allons voir que cela revient à faire choix d'un système particulier d'unités où l'unité de longueur reste arbitraire et où l'unité de masse est fonction de l'unité de longueur.

Cherchons d'abord les dimensions de f. On a

$$F = f\frac{mm'}{r^2}, \qquad f = F\frac{r^2}{mm'}.$$

Faisons un changement d'unités en prenant une unité de longueur λ fois plus petite, une unité de temps τ fois plus petite, une unité de masse μ fois plus petite. Désignons par l'indice 1 les nouvelles valeurs des quantités considérées, on a (la force étant le produit d'une masse par une accélération)

$$m_1 = \mu m, \qquad r_1 = \lambda r, \qquad F_1 = F\frac{\lambda\mu}{\tau^2}.$$

Le nouveau coefficient d'attraction sera lié à l'ancien par la relation

$$f_1 = F\frac{\lambda\mu}{\tau^2}\,\frac{\lambda^2 r^2}{\mu^2 mm'} = \frac{F r^2}{mm'}\,\frac{\lambda^3}{\mu\tau^2} = f\frac{\lambda^3}{\mu\tau^2}.$$

Prenons maintenant une unité de longueur arbitraire, une unité de masse constituée par le cube unité formé du liquide homogène considéré. On aura bien alors $\rho = 1$, puisque la masse de l'unité de volume est 1. Il y a entre λ et μ une relation évidente dans ce

cas. Si l'unité de longueur devient λ fois plus petite, l'unité de masse devient λ^3 fois plus petite, donc $\mu = \lambda^3$ et il vient

$$f_1 = \frac{f}{\tau^2}.$$

Prenons encore une unité de temps définie comme l'a fait M. Lippmann (*Comptes rendus*, 8 mai 1899). Quand on prend pour unité de temps la seconde, on a $f = \frac{1}{3862^2}$. Avec les hypothèses précédentes, en faisant maintenant un changement d'unité de temps, on trouve $f = \frac{1}{3862^2}\frac{1}{\tau^2}$. Pour que f devienne égal à 1, il suffit que τ soit 3862 fois plus petit ou que la nouvelle unité soit 3862 fois plus grande, c'est-à-dire égale à $3862^s = 1^h 4^m 22^s$, valeur très voisine de l'heure. Lippmann appelle cette nouvelle unité de temps l'*heure naturelle*. Elle est indépendante de la rotation de la Terre et de sa variation possible. Elle est aussi constante que la constante même de l'attraction et peut se déterminer par des expériences purement physiques.

Dans ce système d'unités, on aura pour les dimensions du moment d'inertie, du potentiel et de l'énergie, par rapport à l'unité de longueur qui reste seule arbitraire,

$$(70)\qquad \left\{\begin{array}{c} I_1 = \int \rho r^2\, d\tau = \lambda^5 I, \qquad V_1 = \int \frac{\rho\, d\tau}{r} = \lambda^2 V, \\ W_1 = \int \rho V\, d\tau = \lambda^5 W. \end{array}\right.$$

25. Équations fonctionnelles. — On a cherché, de diverses manières, à former des équations fonctionnelles pour le problème qui nous occupe.

Nous supposons $\rho = 1$ et $f = 1$. La masse donnée tourne autour de Oz, les axes Ox et Oy sont entraînés dans la rotation. L'équation différentielle du problème et son intégrale sont

$$dp = dV + \omega^2(x\,dx + y\,dy), \qquad p - p_0 = V + \omega^2(x^2 + y^2) + K;$$

p_0 est la pression à la surface libre. Elle est constante ou nulle. Posons

$$p - p_0 = \varphi(x, y, z).$$

A l'intérieur du corps, puis à la surface, nous avons

$$\varphi(x, y, z) > 0, \qquad \varphi(x, y, z) = 0.$$

Cette fonction $\varphi(x, y, z)$ peut être prolongée analytiquement à l'extérieur du volume. Il suffit pour cela de prolonger à l'extérieur la fonction V, qui représente le potentiel, en conservant la continuité de ses dérivées secondes. Mais il est évident alors que cette fonction prolongée ne représentera plus le potentiel à l'extérieur. Par exemple, le potentiel en un point intérieur de la sphère de rayon a est

$$V = 2\pi a^2 - \frac{2}{3}\pi r^2.$$

Cette fonction reste parfaitement déterminée, même quand on suppose $r > a$; c'est ce que nous appelons le *prolongement de la fonction intérieure*. Pour $r > a$, elle ne représentera plus le potentiel.

La fonction $\varphi(x, y, z)$ est définie partout et, à cause de la continuité, elle est négative à l'extérieur. L'équation

$$(71) \qquad \varphi(x, y, z) = \iiint \frac{da\,db\,dc}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}} + \frac{\omega^2}{2}(x^2+y^2) + K,$$

l'intégrale étant étendue à tout le domaine où $\varphi(a, b, c)$ est positif ou nul, est une équation fonctionnelle. Elle est assez compliquée, car la fonction φ qu'elle détermine figure explicitement dans l'équation et entre de plus dans les limites d'intégration. La valeur de la constante K se détermine après coup, en écrivant que le volume est donné.

On peut, en employant un artifice dû à Lejeune-Dirichlet (*Journal de Mathématiques*, t. VI), trouver une nouvelle équation fonctionnelle, dans laquelle φ figure explicitement sous les signes d'intégration, avec des limites d'intégration constantes.

On considère pour cela des intégrales définies qui dépendent d'un paramètre et qui jouissent de la propriété suivante. Soit

$$I(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u, t)\,dt.$$

Si $u > 0$, on a $I = 1$; et si $u < 0$, on a $I = 0$. On peut en former par les procédés élémentaires, et, dans son Mémoire, Dirichlet en

indique plusieurs formes. On a, par exemple,

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin ut}{t}\,dt = \pm 1,$$

suivant que $u > 0$ ou $u < 0$. Pour former alors une intégrale telle que $I(u)$, il suffit de prendre

$$(72)\qquad I(u) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{\sin ut}{t} + \frac{\sin t}{t}\right)dt.$$

Si $u > 0$, les deux termes de l'intégrale sont égaux à π et $I(u) = 1$. Si $u < 0$, le premier terme est égal à -1 et le second à $+1$; on a $I(u) = 0$.

L'introduction des intégrales de ce genre permet d'écrire l'équation fonctionnelle précédente sous la forme

$$(73)\qquad \varphi(x, y, z) = \iiiint_{-\infty}^{+\infty}\frac{f[\varphi(a, b, c), t]\,da\,db\,dc\,dt}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}} + \frac{\omega^2}{2}(x^2+y^2) + K.$$

Les deux équations sont bien identiques, comme il est facile de le voir, en commençant l'intégration par rapport à t. C'est seulement pour le domaine où $\varphi(a, b\ c) \geqq 0$ que l'intégrale n'est pas nulle.

Ainsi, la fonction φ figure explicitement sous le signe *somme* et les limites d'intégration sont devenues constantes. Néanmoins, l'équation fonctionnelle ainsi obtenue est encore très compliquée, même avec les formes les plus simples de f.

En écrivant ensuite $\varphi(x, y, z) = 0$, on aura l'équation de la surface libre.

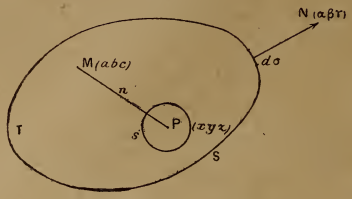
26. Équations intégro-différentielles. — On a aussi cherché dans une autre voie en essayant de former des équations où figurent le signe *somme* et les signes de différentiation. Pour arriver à ces équations, nous allons donner une expression remarquable du potentiel due à Gauss.

Soient a, b, c l'élément attirant M et $P(x, y, z)$ un point fixe

intérieur à la masse attirante (*fig.* 26). Le potentiel en P est

$$(74)\quad V = \int\int\int \frac{da\,db\,dc}{r} = \int\int\int \frac{da\,db\,dc}{\sqrt{(a-x)^2+(b-y)^2+(c-z)^2}}.$$

Fig. 26.



Considérons le vecteur dont les composantes sont

$$(75)\qquad A = \frac{1}{2}\,\frac{a-x}{r},\qquad B = \frac{1}{2}\,\frac{b-y}{r},\qquad C = \frac{1}{2}\,\frac{c-z}{r}.$$

Sa divergence est égale à $\frac{1}{r}$; en effet, on a

$$\frac{\partial A}{\partial a} = \frac{1}{2r} - \frac{(a-x)^2}{2r^3}\ldots,\qquad \frac{\partial A}{\partial a} + \frac{\partial B}{\partial b} + \frac{\partial C}{\partial c} = \frac{3}{2}\,\frac{1}{r} - \frac{1}{2}\,\frac{1}{r} = \frac{1}{r}.$$

Comme P est intérieur à T, le vecteur A, B, C, n'est plus défini au point P lui-même, car sa grandeur et sa direction deviennent indéterminées. Entourons alors le point P d'une petite sphère de centre P. Soient t son volume et s sa surface. Appliquons maintenant la formule de Green au volume $T - t$ compris entre S et s; on a

$$\int\int\int_{T-t}\left(\frac{\partial A}{\partial a} + \frac{\partial B}{\partial b} + \frac{\partial C}{\partial c}\right) d\tau = \int\int_{S+s} (A\alpha + B\beta + C\gamma)\, d\sigma.$$

ou

$$\int\int\int_{T-t} \frac{d\tau}{r} = \int\int_{S+s} \frac{\alpha(a-x)+\beta(b-y)+\gamma(c-z)}{2r}\, d\sigma.$$

Considérons la dernière intégrale appliquée seulement à la sphère s. Soit r le rayon de cette sphère, soit $d\omega$ l'élément de surface de la sphère de rayon 1 et de centre P qui correspond à $d\sigma$; on a $d\sigma = r^2\, d\omega$, et l'intégrale devient

$$r\int\int_s [\alpha(a-x)+\beta(b-y)+\gamma(c-z)]\, d\omega.$$

Elle tend vers zéro avec r, car l'élément différentiel reste fini. D'autre part, le premier membre de l'équation ci-dessus tend vers le potentiel V quand t tend vers zéro. On a donc

$$(76) \qquad V = \frac{1}{2}\int\int_S \frac{\alpha(a-x)+\beta(\beta-y)+\gamma(c-z)}{r}\,d\sigma.$$

On peut donner facilement une *interprétation géométrique* de la quantité placée sous le signe *somme*. En effet, α, β, γ sont les cosinus directeurs de la normale extérieure AN à l'élément $d\sigma$. Les valeurs 2A, 2B, 2C sont les cosinus directeurs de la direction PM. En appelant $\widehat{rn}$ l'angle de ces deux directions, on a donc

$$\cos(rn) = \frac{\alpha(a-x)+\beta(b-y)+\gamma(c-z)}{r}, \qquad V = \frac{1}{2}\int\int_S \cos(rn)\,d\sigma.$$

Supposons maintenant que la surface soit celle de notre fluide en équilibre relatif; l'équation de cette surface est

$$p - p_0 = V + \frac{\omega^2}{2}(x^2+y^2) + K, \qquad V + \frac{\omega^2}{2}(x^2+y^2) = C.$$

Prenons notre point P sur la surface libre, et remplaçons V par sa valeur trouvée ci-dessus; il vient

$$(77) \quad \frac{1}{2}\int\int_S \frac{\alpha(a-x)+\beta(b-y)+\gamma(c-z)}{\sqrt{(a-x)^2+(b-y)^2+(c-z)^2}}\,d\sigma + \frac{\omega^2}{2}(x^2+y^2) = C.$$

C'est là une équation fonctionnelle où entrent sous le signe *somme* la fonction inconnue et ses dérivées partielles du premier ordre, c'est-à-dire une équation intégro-différentielle. Prenons, par exemple, $z = f(x, y)$ pour l'équation de la surface libre. On a $c = f(a, b)$, où f représente la même fonction. Les dérivées partielles de z par rapport à x et y, soient p et q, figurent dans les expressions de α, β, γ et $d\sigma$. Mais on obtiendrait ainsi une équation qui ne serait pas symétrique. Pour rendre les calculs symétriques, exprimons les coordonnées de la surface au moyen de deux paramètres; on aura

$$x = f(l, m), \qquad y = \varphi(l, m), \qquad z = \psi(l, m),$$
$$a = f(\lambda, \mu), \qquad b = \varphi(\lambda, \mu), \qquad c = \psi(\lambda, \mu).$$

En posant

$$P = \frac{\partial b}{\partial \lambda}\frac{\partial c}{\partial \mu} - \frac{\partial b}{\partial \mu}\frac{\partial c}{\partial \lambda}, \qquad Q = \frac{\partial c}{\partial \lambda}\frac{\partial a}{\partial \mu} - \frac{\partial a}{\partial \lambda}\frac{\partial c}{\partial \mu}, \qquad R = \frac{\partial a}{\partial \lambda}\frac{\partial b}{\partial \mu} - \frac{\partial b}{\partial \lambda}\frac{\partial a}{\partial \mu},$$

on aura

$$\alpha = \frac{P}{\sqrt{P^2+Q^2+R^2}}, \qquad \beta = \frac{Q}{\sqrt{P^2+Q^2+R^2}}, \qquad \gamma = \frac{R}{\sqrt{P^2+Q^2+R^2}},$$

$$d\sigma = \sqrt{P^2+Q^2+R^2}\, d\lambda\, d\mu,$$

$$[\alpha(a-x)+\beta(b-y)+\gamma(c-z)]\,d\sigma = [P(a-x)+Q(b-y)+R(c-z)]\,d\lambda\, d\mu.$$

d'où l'équation définitive

$$(78) \qquad \iint \begin{vmatrix} a-x & b-y & c-z \\ \frac{\partial a}{\partial \lambda} & \frac{\partial b}{\partial \lambda} & \frac{\partial c}{\partial \lambda} \\ \frac{\partial a}{\partial \mu} & \frac{\partial b}{\partial \mu} & \frac{\partial c}{\partial \mu} \end{vmatrix} \frac{d\lambda\, d\mu}{r} + \omega^2(x^2+y^2) = C.$$

La constante sera déterminée par la condition que le volume est donné. On peut, dans cette formule, prendre x et y comme variables indépendantes, et z serait la fonction à déterminer. On peut aussi particulariser le problème en cherchant les surfaces de révolution qui sont solution de la question (Appell, *Comptes rendus*, 1er semestre 1912). Cette méthode a été appliquée par M. Collet (*Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, t. IV, 1912).

27. **Formules différentielles qui se rattachent à la théorie du travail virtuel** (Poincaré, *Leçons sur les figures d'équilibre*, p. 24). — Les forces qui agissent sur la masse du fluide sont :

1° Les forces d'attraction mutuelle de la forme $-\frac{m_i m_k}{r_{ik}^2}$;

2° La force centrifuge, qui a pour composantes relativement aux axes mobiles $m\omega^2 x$, $m\omega^2 y$, 0;

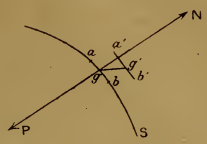
3° La pression extérieure constante, qui exerce sur chaque élément de la surface libre une force $p_0\, d\sigma$.

La condition d'équilibre est, d'après le principe du travail virtuel, que le travail des forces directement appliquées soit nul pour tout déplacement virtuel compatible avec les liaisons.

Les liaisons, dans le cas qui nous occupe, sont exprimées par ce fait que le liquide est homogène, incompressible, sans frottement. Les déplacements compatibles avec les liaisons laisseront donc le volume invariable.

Évaluons le travail des forces de pression. L'élément superficiel ab est venu en $a'b'$ (*fig.* 27). Désignons par ζ la projection

Fig. 27.



sur la normale extérieure du déplacement gg' du centre de gravité de $d\sigma$. Le travail élémentaire de ce déplacement virtuel est $-p_0\zeta\, d\sigma$. Il faut le signe — parce que la pression est dirigée suivant la normale intérieure. On a

$$\begin{aligned}\mathfrak{T}_e &= \sum\left[-\frac{m_i m_k}{r_{ik}^2}\,\delta r_{ik} + m\omega^2(x\,\delta x + y\,\delta y) - p_0\zeta\, d\sigma\right]\\ &= \delta\sum\left[\frac{m_i m_k}{r_{ik}} + \frac{\omega^2}{2}\,m(x^2+y^2)\right] - p_0\,\Sigma\zeta\, d\sigma.\end{aligned}$$

Si W désigne l'énergie potentielle, I le moment d'inertie par rapport à l'axe de rotation, il vient

$$(79)\qquad W = \sum\frac{m_i m_k}{r_{ik}},\qquad I = \Sigma m(x^2+y^2) = \int\int(x^2+y^2)\,d\tau\qquad(\rho = 1).$$

D'autre part, l'expression $\Sigma\zeta\, d\sigma$ est évidemment la variation de volume de la masse fluide dans le déplacement virtuel considéré, car $\zeta\, d\sigma$ est le volume du petit cylindre de base $d\sigma$ et de hauteur ζ, c'est-à-dire $\Sigma\zeta\, d\sigma = \delta T$. On aura donc finalement

$$(80)\qquad \mathfrak{T}_e = \delta\left(W + \frac{\omega^2}{2}\,I - p_0 T\right).$$

Telle est l'expression générale du travail virtuel total, pour un déplacement quelconque compatible ou non avec les liaisons.

Pour un déplacement virtuel compatible avec les liaisons, $\delta T = 0$. Le travail dû aux pressions extérieures est nul et la condition

d'équilibre devient

$$(81) \qquad \delta\left(W + \frac{\omega^2}{2} I\right) = 0, \qquad \delta W + \frac{\omega^2}{2} \delta I = 0.$$

Cette condition revient à écrire que $W + \frac{\omega^2}{2} I$ est maximum ou minimum. Or, nous savons que cette condition nécessaire n'est pas suffisante. Autrement dit, pour tout maximum ou minimum de cette fonction, on a une position d'équilibre; mais il pourrait y avoir d'autres positions d'équilibre qui ne correspondraient pas à un maximum ou à un minimum.

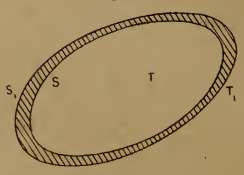
28. **Calcul de quelques variations.** — Calculons maintenant l'*expression d'un certain nombre de variations*, pour des déplacements virtuels quelconques.

On a d'abord, pour la variation du volume,

$$\delta T = \int_S \zeta \, d\sigma.$$

Pour la variation du moment d'inertie, considérons un déplacement virtuel quelconque, par exemple une dilatation qui amène la surface S en S′ (*fig.* 28). Le moment d'inertie total se compose

Fig. 28.



du moment d'inertie du corps S et du moment d'inertie de la couronne comprise entre S et S′. On a donc

$$(82) \qquad \delta I = \int_S (x^2 + y^2)\zeta \, d\sigma.$$

L'énergie comprendra, dans les mêmes conditions : l'énergie W de S, l'énergie W_1 de la couronne, l'énergie mutuelle de la couronne et de S. Si je désigne par V le potentiel dû au corps T,

par V_1 celui dû à la couronne, par $d\tau_1$ l'élément de volume de la couronne, il vient

$$W + \delta W = W + W_1 + \int V\, d\tau_1, \qquad \delta W = W_1 + \int_S V\zeta\, d\sigma.$$

Mais il faut remarquer que W_1 est infiniment petit d'ordre supérieur à l'intégrale, car W_1 est l'énergie de la couche T_1 infiniment mince et a pour expression

$$W_1 = \frac{1}{2}\int V_1\, d\tau_1 = \frac{1}{2}\int V_1 \zeta\, d\rho.$$

V_1 est infiniment petit par rapport à V et l'on peut écrire

$$\delta W = \int_S V\zeta\, d\sigma. \tag{83}$$

29. **Relations entre l'énergie, le moment d'inertie, le volume, la vitesse de rotation et la fonction des forces.** — 1° L'équation de l'équilibre relatif, qui est l'équation du problème, peut s'écrire en posant

$$U = V + \frac{\omega^2}{2}(x^2 + y^2), \qquad dp = dU.$$

Pour un déplacement virtuel absolument général, compatible ou non avec les liaisons, on a

$$\begin{aligned}\delta\left(W + \frac{\omega^2}{2} I\right) &= \int_S V\zeta\, d\sigma + \frac{\omega^2}{2}\int_S (x^2 + y^2)\zeta\, d\sigma \\ &= \int_S \left[V + \frac{\omega^2}{2}(x^2 + y^2)\right]\zeta\, d\sigma = \int_S U\zeta\, d\sigma.\end{aligned}$$

Nous pouvons vérifier maintenant ce qui été dit dans le cas où l'équilibre relatif existe. Sur la surface libre, U est constant, puisque sa variation, égale à celle de la pression, est nulle. Donc, s'il y a équilibre, dans un déplacement virtuel quelconque, compatible ou non, on a

$$\delta\left(W + \frac{\omega^2}{2} I\right) = U_0 \int_S \zeta\, d\sigma = U_0\, \delta T, \tag{84}$$

et, si le déplacement est compatible avec les liaisons $\delta T = 0$,

$$\delta\left(W + \frac{\omega^2}{2} I\right) = 0. \tag{85}$$

Dans le cas d'un déplacement quelconque, on peut écrire

$$(86) \qquad \frac{\delta\left(W + \frac{\omega^2}{2} I\right)}{\delta T} = U_0.$$

Considérons maintenant un déplacement spécial, infiniment petit, qui laisse tous les éléments homothétiques. Toutes les dimensions linéaires sont alors multipliées par $1 + \varepsilon$, où ε est infiniment petit. Les formules de dimensions établies dans le cas $\rho = 1$ et $f = 1$ nous donnent

$$W + \delta W = W(1 + \varepsilon)^5 = W + 5\varepsilon W, \qquad I + \delta I = I + 5\varepsilon I, \qquad \delta T = 3\varepsilon T.$$

On a donc

$$(87) \qquad \frac{5W\varepsilon + \frac{5}{2}\omega^2 I\varepsilon}{3T\varepsilon} = U_0, \qquad \frac{5}{3}\left(W + \frac{\omega^2}{2} I\right) = U_0 T.$$

Cette *relation remarquable* entre W, I, T, U_0 est due à Poincaré.

2° On a $\Delta U = 2\omega^2 - 4\pi$ à l'intérieur du corps. S'il n'y a pas de pression extérieure, ω^2 ne peut pas dépasser 2π, comme l'a démontré Poincaré, et, si la surface est convexe, ne peut dépasser π, d'après Crudeli. Mais, avec une pression extérieure, ω^2 peut devenir supérieur à 2π; on peut donc distinguer trois cas :

1° $2\omega^2 - 4\pi < 0$, ΔU est négatif; à l'intérieur $U > U_0$, il ne peut pas y avoir de minimum de U, mais seulement un maximum.

2° $2\omega^2 - 4\pi > 0$, $U < U_0$ à l'intérieur; il y a un minimum de U.

3° $2\omega^2 - 4\pi = 0$, $U = U_0$ sur la surface et $\Delta U = 0$ à l'intérieur, donc partout.

Prenons l'intégrale suivante étendue au volume T. On a, d'après (28) et (79),

$$\int_T U\,d\tau = \int_T V\,d\tau + \frac{\omega^2}{2}\int_T (x^2 + y^2)\,d\tau = 2W + \frac{\omega^2}{2} I.$$

On pourra alors distinguer les trois cas suivants :

$$1^\circ \qquad \omega^2 = 2\pi, \qquad U = U_0, \qquad 2W + \frac{\omega^2}{2} I = U_0 T;$$

$$2^\circ \qquad \omega^2 < 2\pi, \qquad U > U_0, \qquad 2W + \frac{\omega^2}{2} I > U_0 T;$$

$$3^\circ \qquad \omega^2 > 2\pi, \qquad U < U_0, \qquad 2W + \frac{\omega^2}{2} I < U_0 T.$$

Or, d'après (87), le premier cas devient

$$\frac{5}{3}\left(W + \frac{\omega^2}{2} I\right) = 2W + \frac{\omega^2}{2} I \qquad \text{ou} \qquad I\omega^2 = W.$$

L'ensemble des trois cas peut alors se résumer dans le tableau suivant :

$$\begin{array}{lll} \omega^2 = 2\pi, & \omega^2 < 2\pi, & \omega^2 > 2\pi; \\ I\omega^2 = W, & I\omega^2 < W, & I\omega^2 > W. \end{array}$$

30. **Figures annulaires.** — Poincaré a déduit de ces relations une conséquence remarquable, c'est que, pour des valeurs suffisamment grandes de ω, s'il y a encore des figures d'équilibre, l'axe de rotation ne rencontre plus le fluide. Il peut alors se faire que certaines surfaces d'équilibre soient des surfaces annulaires. On peut d'ailleurs faire croître ω autant que l'on veut, à condition d'ajouter une pression extérieure constante suffisamment grande.

Nous faisons donc l'hypothèse suivante. Nous partons d'une certaine valeur de ω pour laquelle il existe une figure d'équilibre, et nous faisons croître ω. La figure d'équilibre se modifie, se déforme sans cesser d'exister, par hypothèse. A chaque valeur de ω correspondent alors certaines valeurs de W, I, U_0. Le volume T reste constant. A un accroissement $\delta\omega$ correspondront les accroissements δW, δI, δU_0. La relation ci-dessus (87) donne alors

$$\delta W + \frac{\omega^2}{2}\delta I + \omega I\,\delta\omega = \frac{3}{5} T\,\delta U_0.$$

Mais, de plus, cette variation, qui laisse invariable le volume, est compatible avec les liaisons; et, en tenant compte du théorème du travail virtuel (81), il reste

$$(88) \qquad \omega I\,\delta\omega = \frac{3}{5} T\,\delta U_0.$$

Divisons membre à membre cette relation et la relation (87), il vient

$$\frac{W + \frac{1}{2}\omega^2 I}{\omega I \delta\omega} = \frac{U_0}{\delta U_0} \quad \text{ou} \quad \frac{W + \frac{1}{2}\omega^2 I}{\omega^2 I} = \frac{U_0}{\omega}\frac{\delta\omega}{\delta U_0}.$$

Si $\delta\omega$ est positif, δU_0 le sera aussi. Si donc on fait croître ω et que la figure d'équilibre continue d'exister, il arrivera un moment où l'on aura $\omega^2 > 2\pi$, et par conséquent $\omega^2 I > W$, d'où

$$\frac{W}{\omega^2 I} + \frac{1}{2} < \frac{3}{2}.$$

La formule ci-dessus deviendra donc

$$(89) \qquad \frac{U_0}{\omega}\frac{\delta\omega}{\delta U_0} < \frac{3}{2} \quad \text{ou} \quad \frac{\delta U_0}{U_0} > \frac{2}{3}\frac{\delta\omega}{\omega}.$$

Cette inégalité a lieu à partir d'une certaine valeur de ω. En intégrant à partir de cette valeur, on aura

$$LU_0 > \frac{2}{3} L\omega + C.$$

Si ω croît, U_0 croît aussi; et si ω augmente indéfiniment, il en est de même de U_0.

Il en résulte alors qu'à partir d'une certaine valeur de ω, l'axe de rotation ne peut plus rencontrer la surface du liquide. En effet, appelons P le point où l'axe de rotation rencontre la surface libre. Ce sera le pôle de la masse tournante. En tout point de la surface, on a

$$U_0 = V + \frac{\omega^2}{2}(x^2 + y^2),$$

et au pôle $U_0 = V_p$. Ainsi U_0 est la valeur du potentiel au pôle même, s'il existe. Mais ce potentiel ne peut pas augmenter indéfiniment, car si T est donné, on a vu que l'on a toujours $V < 2\pi a^2$, où a est le rayon de la sphère de même volume (36).

Donc, si l'on admet que la figure d'équilibre continue d'exister, il arrive un moment où l'axe de rotation ne peut plus rencontrer la surface libre. La figure doit devenir annulaire.

CHAPITRE V.

FONCTIONS SPHÉRIQUES.

Nous venons d'étudier les théorèmes généraux donnés par Poincaré et nous en arrivons aux questions particulières qu'il a étudiées dans le Tome 7 des *Acta mathematica*. La méthode de Poincaré repose sur l'étude des fonctions sphériques et des fonctions de Lamé, dont nous allons examiner les principales propriétés.

31. Expression de ΔV dans un changement de variables. — Cherchons d'abord ce que devient l'expression de Laplace ΔV, quand on fait un changement de variables défini par

$$x = f(\xi, \eta, \zeta), \qquad y = f_1(\xi, \eta, \zeta), \qquad z = f_2(\xi, \eta, \zeta),$$

où ξ, η, ζ sont trois nombres qui définissent les nouvelles coordonnées du point. On peut aussi dire que x, y, z est le point d'intersection des trois surfaces

$$\xi = \text{const.}, \qquad \eta = \text{const.}, \qquad \zeta = \text{const.}$$

Nous supposons que ces trois surfaces sont orthogonales. La valeur de l'élément linéaire devient

$$(90) \qquad ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = \alpha^2\, d\xi^2 + \beta^2\, d\eta^2 + \gamma^2\, d\zeta^2.$$

Considérons le point M défini par ξ, η, ζ et les trois points voisins (*fig.* 29)

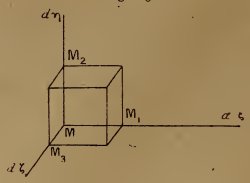
$$M_1(\xi + d\xi, \eta, \zeta), \qquad M_2(\xi, \eta + d\eta, \zeta), \qquad M_3(\xi, \eta, \zeta + d\zeta).$$

On aura alors

$$MM_1 = \alpha\, d\xi, \qquad MM_2 = \beta\, d\eta, \qquad MM_3 = \gamma\, d\zeta.$$

Les surfaces étant orthogonales, ces côtés sont perpendiculaires. Appliquons à ce parallélépipède élémentaire la formule de Green

Fig. 29.



(formule 1) pour le cas où la fonction considérée dérive d'un potentiel

$$\int\int\int_V \Delta V\, d\tau = \int\int_S \frac{dV}{dn}\, d\sigma.$$

Le premier membre se réduit à

$$\Delta V\, \alpha\beta\gamma\, d\xi\, d\eta\, d\zeta.$$

Dans le second, la dérivée suivant la normale extérieure se compose de six termes relatifs à chacune des faces. Considérons la face MM_2M_3 et la face opposée. Pour la face MM_2M_3 on a

$$d\sigma = \beta\gamma\, d\eta\, d\zeta, \qquad \frac{dV}{dn} = -\frac{V_{M_1} - V_M}{MM_1} = -\frac{\partial V}{\alpha\, \partial\xi}.$$

Le flux à travers cette face est donc

$$-\frac{\partial V}{\alpha\, \partial\xi}\, \beta\gamma\, d\eta\, d\zeta.$$

Pour la face opposée, le flux est de signe contraire, la normale extérieure étant de sens contraire, et sa valeur est augmentée de la variation du flux quand on passe de M en M_1. Ce flux est donc

$$\frac{\partial V}{\alpha\, \partial\xi}\, \beta\gamma\, d\eta\, d\zeta + \frac{\partial}{\partial\xi}\left[\frac{\partial V}{\alpha\, \partial\xi}\, \beta\gamma\, d\eta\, d\zeta\right] d\xi.$$

Le flux résultant à travers les deux faces opposées sera ($d\eta$, $d\zeta$ étant constants)

$$d\xi\, d\eta\, d\zeta\, \frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{\beta\gamma}{\alpha}\, \frac{\partial V}{\partial\xi}\right).$$

En ajoutant les expressions analogues pour les autres faces et

divisant les deux membres par $d\xi$, $d\eta$, $d\zeta$, il vient finalement

$$(91)\qquad \Delta V = \frac{1}{\alpha\beta\gamma}\left[\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{\beta\gamma}{\alpha}\frac{\partial V}{\partial\xi}\right) + \frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{\alpha\gamma}{\beta}\frac{\partial V}{\partial\eta}\right) + \frac{\partial}{\partial\zeta}\left(\frac{\alpha\beta}{\gamma}\frac{\partial V}{\partial\zeta}\right)\right].$$

Cette formule permet de calculer ΔV pour un système de coordonnées orthogonales quelconques.

32. **Définition des fonctions sphériques.** — Les fonctions sphériques ont été introduites par Laplace. On les appelle aussi fonctions de Laplace. Ce sont les valeurs des polynomes harmoniques et homogènes, prises aux différents points d'une sphère.

Nous étudions d'abord les polynomes harmoniques homogènes. Ce sont des polynomes $P_n(x, y, z)$, homogènes de degré n, qui vérifient l'équation de Laplace $\Delta V = 0$. Nous aurons donc par définition

$$\Delta P_n = \frac{\partial^2 P_n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P_n}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 P_n}{\partial z^2} = 0 \quad \text{et} \quad P_n(kx, ky, kz) = k^n P_n(x, y, z).$$

Combien y a-t-il de ces polynomes d'un même degré qui soient linéairement indépendants ?

Dans $P_n(x, y, z)$ entrent $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ coefficients arbitraires. De plus ΔP_n est un polynome homogène de degré $n-2$. Il contient donc $\frac{(n-1)n}{2}$ coefficients arbitraires. Pour que l'on ait identiquement $\Delta P_n = 0$, il faut que tous les coefficients de ΔP_n soient nuls, ce qui établit $\frac{(n-1)n}{2}$ relations entre les $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ coefficients de P_n. Il reste donc

$$\frac{(n+1)(n+2)}{2} - \frac{(n-1)n}{2} = \frac{4n+2}{2} = 2n+1,$$

coefficients arbitraires qui figurent dans P_n d'une façon linéaire et homogène. On a, par exemple,

$$P_0 = C, \qquad n = 0,$$

avec un seul coefficient arbitraire;

$$P_1 = Ax + By + Cz, \qquad n = 1,$$

avec trois coefficients arbitraires;

$$P_2 = A(x^2 - y^2) + B(x^2 - z^2) + Cyz + Dzx + Exy, \qquad n = 2,$$

avec cinq coefficients.

Le polynome harmonique le plus général pourra s'écrire

$$(92) \qquad P_n = \lambda_{n,1} P_{n,1} + \lambda_{n,2} P_{n,2} + \ldots + \lambda_{n,2n+1} P_{n,2n+1}.$$

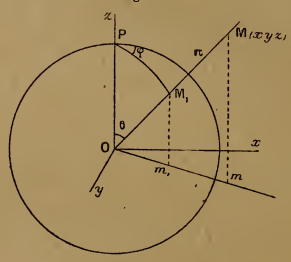
Les λ sont des constantes arbitraires et les $P_{n,k}$ sont des polynomes harmoniques spéciaux également de degré n.

Ces polynomes étant formés, il est évident que si l'on fait un *changement d'axes*, sans changer l'origine, ils restent encore homogènes et harmoniques. Passons, maintenant, des coordonnées rectangulaires aux *coordonnées polaires*, définies comme il suit.

De l'origine comme centre traçons une sphère de rayon 1. Au point $M(x, y, z)$ faisons correspondre le point M_1 de cette sphère situé sur OM. M aura pour coordonnées $OM = r$ et les coordonnées sphériques de M_1, c'est-à-dire la colatitude $\theta = POM$ et la longitude $\varphi = xOm$, où m est la projection de M. On aura tous les points de la sphère en faisant varier θ de 0 à π et φ de 0 à 2π (*fig.* 30). On a

$$x = r \sin\theta \cos\varphi, \qquad y = r \sin\theta \sin\varphi, \qquad z = r \cos\theta.$$

Fig. 30.



Portons ces valeurs de x, y, z dans le polynome P_n; comme il est homogène on aura

$$P_n(x, y, z) = r^n P_n(\sin\theta \cos\varphi, \sin\theta \sin\varphi, \cos\theta).$$

Ce sont ces fonctions P_n en θ et φ qui constituent les fonctions sphériques de Laplace. On peut dire que la fonction sphérique est la valeur que prend sur la sphère de rayon 1 le polynome harmo-

nique. On la désigne ordinairement par Y_n; on a donc

$$(93)\qquad P_n(x_1, y_1, z_1) = P_n(\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta) = Y_n(\theta, \varphi)$$

ou encore

$$P_n(x, y, z) = r^n Y_n(\theta, \varphi), \qquad P_n = r^n Y_n.$$

Le polynome P_n contient $2n+1$ coefficients arbitraires. Il en est de même de Y_n, qui est alors la fonction de Laplace la plus générale de degré n. On peut l'écrire

$$(94)\qquad Y_n(\theta, \varphi) = \lambda_{n,1} Y_{n,1}(\theta, \varphi) + \lambda_{n,2} Y_{n,2}(\theta, \varphi) + \ldots + \lambda_{n,2n+1} Y_{n,2n+1}(\theta, \varphi).$$

Les fonctions $Y_{n,k}$ sont linéairement indépendantes. Au fond, les coordonnées θ et φ ne sont qu'apparentes, puisqu'en faisant tourner les axes d'une façon quelconque, la valeur des polynômes harmoniques sur la sphère reste invariable, en chaque point de la sphère.

33. Formation des fonctions sphériques. — Nous allons maintenant former ces fonctions sphériques. Il suffit pour cela de transformer l'équation de Laplace $\Delta V = 0$, en y introduisant les coordonnées polaires, définies ci-dessus. On a alors

$$ds^2 = dr^2 + r^2\, d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta\, d\varphi^2,$$

d'où

$$\alpha = 1, \qquad \beta = r, \qquad \gamma = r\sin\theta.$$

Il en résulte immédiatement l'expression de ΔV

$$\begin{aligned}\Delta V &= \frac{1}{r^2\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\sin\theta\frac{\partial V}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial V}{\partial\theta}\right) + \frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial\varphi}\right)\right]\\ &= \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial V}{\partial r} + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial V}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 V}{\partial\varphi^2}.\end{aligned}$$

Au lieu de conserver l'angle θ comme variable, on peut introduire aussi la variable t définie par

$$(95)\qquad t = \cos\theta.$$

On a alors

$$x = r\sqrt{1-t^2}\cos\varphi, \qquad y = r\sqrt{1-t^2}\sin\varphi, \qquad z = rt;$$

t varie de -1 à $+1$. On a encore $-\sin\theta\, d\theta = dt$ et il vient

$$(96)\qquad \Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial V}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial t}\left[(1-t^2)\frac{\partial V}{\partial t}\right] + \frac{1}{r^2(1-t^2)}\frac{\partial^2 V}{\partial\varphi^2}.$$

Nous allons former maintenant une *équation célèbre* que vérifient les fonctions sphériques. Posons

$$P_n(x, y, z) = r^n Y_n(\theta, \varphi) = r^n Y_n(t, \varphi)$$

et portons cette expression dans l'équation $\Delta V = 0$, il vient

$$(97) \qquad n(n+1)Y_n + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y_n}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y_n}{\partial\varphi^2} = 0$$

ou, avec la variable t,

$$(97') \qquad n(n+1)Y_n + \frac{\partial}{\partial t}\left[(1-t^2)\frac{\partial Y_n}{\partial t}\right] + \frac{1}{1-t^2}\frac{\partial^2 Y_n}{\partial\varphi^2} = 0.$$

Ces équations définissent les fonctions Y_n, assujetties en plus à être des polynomes homogènes de degré n, en $\sin\theta\cos\varphi$, $\sin\theta\sin\varphi$, $\cos\theta$, ou en $\sqrt{1-t^2}\cos\varphi$, $\sqrt{1-t^2}\sin\varphi$, t.

Nous savons qu'il y a $2n+1$ de ces polynomes linéairement indépendants et nous allons les déterminer sous une forme partilière.

On peut écrire

$$\begin{aligned} x &= r\sin\theta\frac{e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}}{2} &&= r\sqrt{1-t^2}\frac{e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}}{2}, \\ y &= r\sin\theta\frac{e^{i\varphi}-e^{-i\varphi}}{2i} &&= r\sqrt{1-t^2}\frac{e^{i\varphi}-e^{-i\varphi}}{2i}, \\ z &= r\cos\theta &&= rt. \end{aligned}$$

En ordonnant le polynome Y_n par rapport aux puissances de $e^{i\varphi}$, on pourra l'écrire

$$(98) \qquad Y_n = \sum_{p=-n}^{p=n} e^{ip\varphi}X_n^p \qquad (p = -n\ldots 0\ldots +n).$$

X_n^p dépend uniquement de θ ou de t. Les exposants de $\sin\theta$ dans X_n^p sont de même parité que l'indice supérieur p, de sorte que si p est pair X_n^p est un polynome en t, si p est impair X_n^p contient $\sqrt{1-t^2}$ en facteur.

Portons cette expression de Y_n dans l'équation (97') en t. L'équation devient, en faisant porter la sommation par rapport à p sur tout le premier membre,

$$\sum_p\left\{n(n+1)e^{ip\varphi}X_n^p + e^{ip\varphi}\frac{d}{dt}\left[(1-t^2)\frac{dX_n^p}{dt}\right] - \frac{p^2}{1-t^2}e^{ip\varphi}X_n^p\right\} = 0.$$

L'équation doit être vérifiée quel que soit φ, le coefficient de $e^{ip\varphi}$ doit donc être nul

$$(99)\qquad n(n+1)X_n^p + \frac{d}{dt}\left[(1-t^2)\frac{dX_n^p}{dt}\right] - \frac{p^2}{1-t^2}X_n^p = 0.$$

Telle est l'équation différentielle linéaire du second ordre qui définit X_n^p en fonction de t. L'intégrale générale de cette équation est transcendante, mais il y a une intégrale particulière qui est un polynome ou un polynome multiplié par $\sqrt{1-t^2}$. C'est cette intégrale que nous devrons prendre comme solution.

On a ainsi défini la suite des fonctions X_n^p pour toutes les valeurs de p (p varie de $-n$ à $+n$). Remarquons que si l'on change p en $-p$ l'équation (99) ne change pas et que, par conséquent,

$$X_n^{-p} = kX_n^p.$$

Chaque fonction X_n^p n'est déterminée qu'à un coefficient arbitraire près.

En faisant $p = 0$, dans cette équation on a la fonction X_n^0. En donnant à p les valeurs de 1 à n on a les fonctions

$$e^{i\varphi}X_n^1,\quad \ldots,\quad e^{ip\varphi}X_n^p,\quad \ldots,\quad e^{in\varphi}X_n^n,$$

puis de -1 à $-n$ les fonctions

$$e^{-i\varphi}X_n^1,\quad \ldots,\quad e^{-ip\varphi}X_n^p,\quad \ldots,\quad e^{-in\varphi}X_n^n.$$

On a bien ainsi $2n+1$ fonctions linéairement indépendantes. En les additionnant et retranchant, pour faire disparaître les imaginaires, on peut aussi les écrire

$$(100)\qquad \begin{array}{lllll} X_n^0, & X_n^1\cos\varphi, & \ldots, & X_n^p\cos p\varphi, & \ldots, & X_n^n\cos n\varphi. \\ & X_n^1\sin\varphi, & \ldots, & X_n^p\sin p\varphi, & \ldots, & X_n^n\sin n\varphi. \end{array}$$

Pour les déterminer complètement, il n'y a plus qu'à chercher les solutions de l'équation linéaire du deuxième ordre à laquelle les X_n^p doivent satisfaire.

34. Étude du polynome de Legendre. — Étudions d'abord la première équation, celle qui correspond à $p = 0$. La solution X_n^0 est bien connue. C'est ce qu'on appelle un *polynome de Legendre*. Cette solution constitue, comme nous le verrons, la *fonction sphé-*

rique fondamentale. On a, en écrivant simplement X_n pour X_n^0,

$$\frac{d}{dt}\left[(1-t^2)\frac{dX_n}{dt}\right]+n(n+1)X_n=0, \tag{101}$$

dont la solution est

$$X_n=k\frac{d^n(t^2-1)^n}{dt^n}.$$

Posons, en effet,

$$u=k(t^2-1)^n, \qquad \frac{du}{dt}=2knt(t^2-1)^{n-1}, \qquad (t^2-1)\frac{du}{dt}=2ntu.$$

Dérivons $n+1$ fois les deux membres de cette dernière équation, d'après la règle connue, on a

$$(t^2-1)\frac{d^{n+2}u}{dt^{n+2}}+2t(n+1)\frac{d^{n+1}u}{dt^{n+1}}+\frac{2n(n+1)}{1.2}\frac{d^nu}{dt^n}$$
$$=2nt\frac{d^{n+1}u}{dt^{n+1}}+2n(n+1)\frac{d^nu}{dt^n},$$

et comme $X_n=\frac{d^nu}{dt^n}$ on a, en remplaçant

$$(t^2-1)\frac{d^2X_n}{dt^2}+2t(n+1)\frac{dX_n}{dt}+n(n+1)X_n$$
$$=2nt\frac{dX_n}{dt}+2n(n+1)X_n,$$

$$(t^2-1)\frac{d^2X_n}{dt^2}+2t\frac{dX_n}{dt}-n(n+1)X_n=0.$$

Cette équation est bien identique à la proposée, car elle peut s'écrire

$$\frac{d}{dt}\left[(t^2-1)\frac{dX_n}{dt}\right]-n(n+1)X_n=0.$$

On donne pratiquement à k une valeur particulière, et l'on désigne sous le nom de polynome de Legendre l'expression

$$X_n=\frac{1}{2^n.n!}\frac{d^n(t^2-1)^n}{dt^n}. \tag{102}$$

Nous avons ainsi la première des $2n+1$ fonctions de Laplace. Pour achever l'analyse de Poincaré, nous allons montrer que les polynomes X_n^p s'expriment tous en fonction du polynome de Legendre.

35. **Détermination des X_n^p.** — Nous remarquerons d'abord que si un polynome est harmonique, il le reste dans un changement d'axes quelconque.

En prenant pour pôle le point P où l'axe des z rencontre la sphère de rayon 1, nous avons obtenu la fonction X_n^0, qui est fonction de la distance polaire θ.

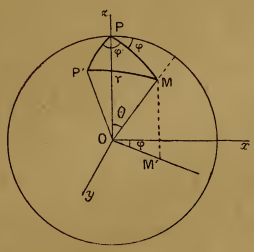
Prenons maintenant un système de coordonnées polaires dont le pôle est P′ (θ' et φ' sont les coordonnées de P′ dans le système de pôle P) (*fig.* 31).

La distance polaire dans le nouveau système est $\gamma = \mathrm{P'M}$ et l'on a

$$\cos\gamma = \cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'\cos(\varphi - \varphi').$$

Dans ce système la fonction X_n^0, considérée comme fonction de γ,

Fig. 31.



est une fonction sphérique. C'est le polynome de Legendre relatif au nouveau système d'axes. Si nous revenons maintenant du pôle P′ au pôle P, la fonction $X_n^0(\cos\gamma)$ reste encore une fonction sphérique et son expression en θ et φ devient

$$X_n^0[\cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'\cos(\varphi - \varphi')],$$

où θ et φ sont les variables et θ', φ' sont deux paramètres qui peuvent prendre des valeurs quelconques.

Introduisons maintenant les exponentielles imaginaires et écrivons l'expression sous une nouvelle forme :

$$X_n^0\left(\cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'\frac{e^{i\varphi - i\varphi} + e^{-i\varphi + i\varphi'}}{2}\right).$$

Posons, avec Poincaré,

$$\frac{\sin\theta' e^{i\varphi'}}{2} = i\xi, \qquad \frac{\sin\theta' e^{-i\varphi'}}{2} = i\eta;$$

ξ et η sont arbitraires comme le sont θ' et φ', et alors $X_n^0(\cos\gamma)$ devient, en remplaçant $\cos\theta$ par t et en remarquant que

$$\sin^2\theta' = -4\xi\eta, \qquad \cos^2\theta' = 1 + 4\xi\eta,$$
$$X_n^0\left[t\sqrt{1+4\xi\eta} + \sqrt{t^2-1}(\xi e^{i\varphi} + \eta e^{-i\varphi})\right].$$

Cette expression est une fonction sphérique quels que soient ξ et η. C'est-à-dire que l'équation différentielle que vérifie Y_n sera vérifiée par ce polynome en t et φ, quelles que soient les valeurs des paramètres ξ et η.

Faisons d'abord $\eta = 0$. Il reste le polynome

$$X_n^0(t + \xi e^{i\varphi}\sqrt{t^2-1})$$

qui vérifie, quel que soit ξ, l'équation différentielle des fonctions sphériques. Développons cette expression par la formule de Taylor, nous aurons un développement limité, puisque X_n^0 est un polynome. L'expression considérée est de la forme $f(t+h)$ et l'on a

$$\begin{aligned} &X_n^0(t + \xi e^{i\varphi}\sqrt{t^2-1}) \\ &\quad = X_n^0(t) + \xi e^{i\varphi}\sqrt{t^2-1}\,\frac{dX_n^0}{dt} + \ldots + \frac{\xi^p e^{ip\varphi}}{p!}(t^2-1)^{\frac{p}{2}}\frac{d^p X_n^0}{dt^p} + \ldots. \end{aligned}$$

Puisque cette expression est une fonction sphérique, quel que soit ξ, chacun des termes de ce développement, coefficient de ξ^p, est lui-même une fonction sphérique. Nous trouvons ainsi les $n+1$ fonctions sphériques suivantes :

$$X_n^0, \quad \sqrt{t^2-1}\,\frac{dX_n^0}{dt}e^{i\varphi}, \quad \ldots, \quad (t^2-1)^{\frac{p}{2}}\frac{d^p X_n^0}{dt^p}e^{ip\varphi}, \quad \ldots, \quad (t^2-1)^{\frac{n}{2}}\frac{d^n X_n^0}{dt^n}e^{in\varphi}.$$

Mais si l'on change φ en $-\varphi$ on aura encore des fonctions sphériques, parce que l'équation différentielle en Y_n (97) ne change pas quand on y change φ en $-\varphi$. Nous aurons ainsi les n nouvelles fonctions sphériques

$$\sqrt{t^2-1}\,\frac{dX_n^0}{dt}e^{-i\varphi}, \quad \ldots, \quad (t^2-1)^{\frac{p}{2}}\frac{d^p X_n^0}{dt^p}e^{-ip\varphi}, \quad \ldots, \quad (t^2-1)^{\frac{n}{2}}\frac{d^n X_n^0}{dt^n}e^{-in\varphi}.$$

En ajoutant et retranchant deux à deux, on obtient

$$X_n^0, \quad \ldots, \quad (t^2-1)^{\frac{p}{2}} \frac{d^p X_n^0}{dt^p} \cos p\varphi, \quad \ldots,$$

$$\ldots, \quad (t^2-1)^{\frac{p}{2}} \frac{d^p X_n^0}{dt^p} \sin p\varphi, \quad \ldots.$$

Nous retrouvons ainsi le tableau déjà formé (100) des $2n+1$ fonctions sphériques d'ordre n, linéairement indépendantes, mais de plus nous obtenons ici l'expression de X_n^p

$$X_n^p = k(t^2-1)^{\frac{p}{2}} \frac{d^p X_n^0}{dt^p}. \tag{103}$$

Tous les polynomes X_n^p sont donc exprimés en fonction de X_n^0. Si p est pair X_n^p est un polynome en t, si p est impair X_n^p est le produit par $\sqrt{1-t^2}$ d'un polynome en t.

On adopte pour k une certaine valeur pratique et l'on pose finalement

$$X_n^p = \frac{1}{(n+1)\ldots(n+p)} (t^2-1)^{\frac{p}{2}} \frac{d^p X_n^0}{dt^p}, \tag{104}$$

ou, en remplaçant X_n^0 par son expression,

$$X_n^p = \frac{1}{2^n (n+p)!} (t^2-1)^{\frac{p}{2}} \frac{d^{n+p}(t^2-1)^n}{dt^{n+p}}. \tag{105}$$

En donnant à p les valeurs $1, 2, \ldots, n$, nous obtiendrons les n polynomes X_n^p. Le polynome X_n^0 a toutes ses racines réelles et comprises entre -1 et $+1$. Le polynome X_n^p admet les racines $t=1$ et $t=-1$ et toutes ses autres racines sont réelles et comprises entre -1 et $+1$.

36. **Fonctions zonales, sectoriales, tessérales.** — Les géomètres anglais ont introduit, dans l'étude de ces polynomes, une terminologie et une représentation qu'il est utile de connaître.

1° Le polynome $X_n^0(t)$ étant égalé à 0, on a une équation dont toutes les racines sont réelles et comprises entre -1 et $+1$. Soit $t=t_1$ l'une de ces racines. Sur la sphère de rayon 1, l'ensemble des points pour lesquels on a $\cos\theta = t_1$ est un petit cercle de pôle P et l'on peut dire qu'une racine de X_n représente ce

cercle. Toutes les racines de X_n qui est d'ordre n déterminent donc n petits cercles de la sphère. Les fonctions X_n^0 ont été dénommées pour cela *fonctions zonales*.

2° Les fonctions sphériques $X_n^n(t)\cos n\varphi$ et $X_n^n(t)\sin n\varphi$ étant égalées à 0, étudions de même leurs racines. $X_n^n(t)$ est une constante et les équations considérées se réduisent à

$$C(t^2-1)^{\frac{n}{2}}\cos n\varphi = 0, \qquad C'(t^2-1)^{\frac{n}{2}}\sin n\varphi = 0;$$

$t = \pm 1$ représentent les pôles P et P_1. Les n valeurs de φ qui annulent $\cos n\varphi$, ou $\sin n\varphi$, représentent n méridiens équidistants. Les zéros des deux fonctions considérées représentent donc, sur la sphère de rayon 1, des méridiens, et ces deux fonctions ont été appelées *sectoriales*.

3° En donnant à p des valeurs comprises entre 0 et n, on obtient encore $2n-2$ fonctions qui, égalées à zéro, fournissent $2n-2$ équations. Les zéros de ces équations représentent *à la fois* des méridiens et des parallèles. Ces fonctions ont été appelées : fonctions *tessérales*.

En résumé, les $2n+1$ fonctions sphériques d'ordre n peuvent se décomposer à ce point de vue en 1 fonction zonale, 2 fonctions sectoriales et $2n-2$ fonctions tessérales.

37. Recherche des solutions de la forme $f(\theta)\,g(\varphi)$. — Nous allons, en résumant l'étude des fonctions sphériques, présenter ces résultats de façon à préparer l'étude des fonctions de Lamé.

1° Nous avons d'abord cherché les polynomes homogènes et harmoniques de degré n. Il y a $2n+1$ polynomes linéairement indépendants, qui satisfont à l'équation $\Delta P_n = 0$ et le polynome le plus général qui satisfait à cette équation peut s'écrire

$$P_n = \lambda_{n,1}P_{n,1} + \lambda_{n,2}P_{n,2} + \ldots + \lambda_{n,2n+1}P_{n,2n+1}.$$

2° Nous avons ensuite exprimé ces polynomes en coordonnées polaires et nous avons écrit dans ce système de coordonnées l'équation de Laplace, en y faisant

$$P_n(x, y, z) = r^n Y_n(\theta, \varphi).$$

Nous avons cherché la solution de l'équation de Laplace ainsi transformée. Le fait remarquable est que l'équation $\Delta P_n = 0$ admet une solution de la forme

$$P_n = r^n f(\theta) g(\varphi), \tag{106}$$

où $f(\theta)$ est un polynome en $\sin\theta$ et $\cos\theta$, et $g(\varphi)$ est un polynome en $\sin\varphi$ et $\cos\varphi$.

Il y a $2n+1$ solutions de cette forme.

Tels sont les résultats de l'analyse qu'on vient d'exposer. Mais on pourrait faire également la théorie des fonctions sphériques en cherchant les solutions de l'équation $\Delta P_n = 0$, qui sont de la forme (106).

Posons d'abord $P_n = r^n Y_n$; on a trouvé, pour Y_n, la relation (97').

Posons ensuite

$$Y_n(\theta, \varphi) = f(\theta) g(\varphi) \qquad \text{ou} \qquad Y_n(t, \varphi) = f(t) g(\varphi).$$

En substituant cette deuxième expression dans l'équation différentielle (97'), elle devient

$$n(n+1) f(t) g(\varphi) + g(\varphi) \frac{d}{dt}[(1-t^2) f'(t)] + \frac{1}{1-t^2} g''(\varphi) f(t) = 0.$$

Les variables se séparent immédiatement sous la forme

$$-\frac{g''(\varphi)}{g(\varphi)} = n(n+1)(1-t^2) + \frac{1-t^2}{f(t)} \frac{d}{dt}[(1-t^2) f'(t)].$$

Mais t et φ sont indépendants. La relation précédente ne peut donc avoir lieu que si les deux membres sont constants. Nous avons alors, pour déterminer $g(\varphi)$, l'équation

$$g''(\varphi) - k g(\varphi) = 0.$$

Mais, de plus, $g(\varphi)$ est un polynome en $\cos\varphi$ et $\sin\varphi$ ou en $e^{i\varphi}$. On peut l'écrire

$$g(\varphi) = \sum_{p=0}^{p=n} a_p \cos p\varphi + b_p \sin p\varphi.$$

Chaque terme de la dérivée seconde reproduira le terme correspondant de $g(\varphi)$ multiplié par $-p^2$ et l'équation à laquelle satis-

fait $g(\varphi)$ devient

$$\sum_{p=0}^{p=n} [a_p(p^2+k)\cos p\varphi + b_p(p^2+k)\sin p\varphi] = 0.$$

Je dis que $k = -p^2$. En effet, pour que cette équation ait lieu quel que soit φ, il faut que tous les termes $a_p(p^2+k)$ et $b_p(p^2+k)$ soient nuls et, si k est différent de $-p^2$, tous les a_p et tous les b_p sont nuls. Quand, au contraire, $p^2+k=0$, alors a_p et b_p ne sont pas tous nuls. Le polynome cherché $g(\varphi)$ se réduit donc à

$$g(\varphi) = a_p \cos p\varphi + b_p \sin p\varphi.$$

Nous avons ainsi k et $g(\varphi)$. Reste l'équation qui définit t. Elle admet comme solution un polynome ou bien le produit d'un polynome par $\sqrt{1-t^2}$. On trouve ainsi la solution

$$X_n^p(a_p \cos p\varphi + b_p \sin p\varphi) \tag{107}$$

et la fonction Y_n, la plus générale, sera

$$Y_n = \sum_{p=0}^{p=n} (a_p \cos p\varphi + b_p \sin p\varphi) X_n^p, \tag{108}$$

où les coefficients a_p et b_p sont arbitraires. Il y a donc $2n+1$ coefficients arbitraires.

38. **Propriétés intégrales des fonctions sphériques.** — 1° Considérons deux fonctions sphériques d'indices n et n' différents : $Y_n(\theta, \varphi)$ et $Y_{n'}(\theta, \varphi)$, on a

$$\int\int Y_n Y_{n'} \sin\theta \, d\theta \, d\varphi = 0 \qquad \text{ou} \qquad \int\int Y_n Y_{n'} \, d\sigma = 0. \tag{109}$$

Les limites de l'intégration sont pour θ de 0 à π, pour φ de 0 à 2π; dans la deuxième formule $d\sigma$ est l'élément superficiel de la sphère. Si l'on pose

$$\cos\theta = t, \qquad -\sin\theta \, d\theta = dt,$$

on a

$$\int_{-1}^{+1} dt \int_0^{2\pi} Y_n Y_{n'} \, d\varphi = 0.$$

Cette proposition se démontre immédiatement par application du théorème de Green (formule 5, Chap. II).

Prenons une sphère de rayon r quelconque et de centre O. Considérons deux polynomes harmoniques P_n et $P_{n'}$. On a

$$\int\int\int_T (P_n \Delta P_{n'} - P_{n'} \Delta P_n)\, d\tau = \int\int_S \left(P_n \frac{dP_{n'}}{dn_e} - P_{n'} \frac{dP_n}{dn_e}\right) d\sigma.$$

Le premier membre est nul puisque $\Delta P_n = 0$ et $\Delta P_{n'} = 0$. En passant aux coordonnées polaires, P_n devient $r^n Y_n(\theta, \varphi)$ et $P_{n'}$ devient $r^{n'} Y_{n'}(\theta, \varphi)$. Les dérivées, suivant la normale, sont

$$\frac{dP_n}{dn_e} = \frac{\partial P_n}{\partial r} = n r^{n-1} Y_n, \qquad \frac{dP_{n'}}{dn_e} = \frac{\partial P_{n'}}{\partial r} = n' r^{n'-1} Y_{n'}.$$

En substituant alors dans l'égalité précédente, il vient

$$0 = (n - n') r^{n+n'+1} \int\int_S Y_n Y_{n'} \sin\theta\, d\theta\, d\varphi.$$

Si $n \neq n'$, l'intégrale double est nulle comme on l'avait annoncé.

2° Si l'on prend deux fonctions sphériques de même indice, et si l'on calcule l'intégrale analogue à (109), que va-t-il se passer? Nous avons $2n + 1$ fonctions sphériques indépendantes d'ordre n en $X_n^p \cos p\varphi$ et $X_n^p \sin p\varphi$. Si l'on prend deux fonctions qui diffèrent, soit par l'indice p, soit par le changement de sin en cos, on a encore une intégrale nulle.

En effet, prenons par exemple $X_n^p \cos p\varphi$ et $X_n^p \cos p'\varphi$, on a

$$\int_0^\pi \sin\theta\, d\theta\, X_n^p X_n^{p'} \int_0^{2\pi} \cos p\varphi \cos p'\varphi\, d\varphi = 0,$$

parce que si $p \neq p'$ la seconde intégrale est nulle.

Prenons $X_n^p \cos p\varphi$ et $X_n^p \sin p\varphi$. On a

$$\int_0^{2\pi} \cos p\varphi \sin p\varphi\, d\varphi = 0 \qquad \text{et} \qquad \int\int (X_n^p)^2 \cos p\varphi \sin p\varphi \sin\theta\, d\theta\, d\varphi = 0.$$

La seule intégrale non nulle sera donc

$$I_n = \int_S Y_n^2\, d\sigma.$$

En effet, dans I_n il y a le terme

$$(110)\quad I_n^p = \int_{-1}^{+1} (X_n^p)^2\, dt \int_0^{2\pi} \cos^2 p\varphi\, d\varphi$$
$$= \pi \int_{-1}^{+1} (X_n^p)^2\, dt = (-1)^p \frac{2\pi}{2n+1} \frac{(n!)^2}{(n-p)!\,(n+p)!}.$$

Le terme $(-1)^p$ provient de ce que dans l'expression de X_n^p entre le terme $(t^2-1)^{\frac{p}{2}}$. On a le même résultat pour $X_n^p \sin p\varphi$.

39. **Développement d'une fonction de deux variables en série de fonctions de Laplace.** — Ces relations sont extrêmement importantes dans un problème déjà traité par Laplace. Voici comment le problème se pose.

Quand on a une fonction $f(\varphi)$, on peut, sous certaines conditions, développer cette fonction en série trigonométrique (série de Fourier), sous la forme

$$f(\varphi) = a_0 + a_1 \cos\varphi + b_1 \sin\varphi + \ldots.$$

On a ainsi une fonction de la position d'un point sur une circonférence.

De même, donnons-nous une fonction de deux angles $f(\theta, \varphi)$ définie pour des valeurs de θ variant de o à π et des valeurs de φ variant de o à 2π. On peut dire que f est une fonction de la position d'un point sur une sphère, car à toute position de M correspond une valeur de θ et une valeur de φ. Inversement, à tout couple de valeurs θ, φ, correspond un point de la sphère.

Sous certaines conditions, on peut développer la fonction f en une série de fonctions de Y_n et écrire

$$f(\theta, \varphi) = Y_0 + Y_1 + \ldots + Y_n(\theta, \varphi) + \ldots,$$

où

$$(111)\qquad Y_n(\theta, \varphi) = \sum_{p=0}^{p=n} (A_n^p \cos p\varphi + B_n^p \sin p\varphi) X_n^p.$$

Laplace a, le premier, indiqué ce développement; mais la première démonstration de sa légitimité est due à Lejeune-Dirichlet (*Journal de Crelle*, 1837) qui faisait certaines hypothèses sur f, en prenant le cas simple où f est supposé continu. Bonnet, puis

Dini, ont donné des développements valables dans des cas plus étendus, quand f admet sur la sphère un nombre fini de discontinuités. Enfin, M. Darboux a étudié le cas où la fonction devient infinie sur la sphère en un nombre fini de points.

La détermination des coefficients, dans le cas où la fonction est finie et continue partout, n'offre pas de difficultés. Nous allons voir que, le développement étant admis, il n'existe qu'*un seul* développement, autrement dit que les coefficients A_n^p et B_n^p sont déterminés complètement.

En effet, supposons que $f(\theta, \varphi)$ admette un développement en fonctions sphériques et puisse s'écrire

$$f(\theta, \varphi) = Y_0 + Y_1 + \ldots + Y_n(\theta, \varphi) + \ldots.$$

Pour avoir l'expression du coefficient A_n^p multiplions les deux membres de l'égalité précédente par $X_n^p \cos p\varphi$, on a

$$f(\theta, \varphi) X_n^p \cos p\varphi = X_n^p \cos p\varphi (Y_0 + Y_1 + \ldots + Y_n + \ldots),$$

puis

$$\int\int_S f(\theta, \varphi) X_n^p \cos p\varphi \sin\theta \, d\theta \, d\varphi = A_n^p I_n^p. \tag{112}$$

On obtiendra de même B_n^p.

Il faudrait montrer, ensuite, que le développement est convergent et qu'il représente bien la fonction donnée : ces propriétés sont démontrées dans les Traités d'Analyse.

40. Problème de Dirichlet pour la sphère. — 1° Prenons pour unité le rayon de la sphère, et donnons-nous pour chaque couple de valeurs de θ et φ la valeur d'une fonction V_0. Il s'agit de trouver une fonction V_i finie, continue et harmonique à l'*intérieur* de la sphère de rayon 1 et qui, sur la sphère, se réduit à V_0.

Développons alors V_0 sur la sphère en une série de fonctions sphériques, en admettant que V_0 remplisse les conditions qui permettent ce développement :

$$V_0 = Y_0 + Y_1 + \ldots + Y_n + \ldots. \tag{113}$$

La solution du problème sera donnée par

$$V_i = Y_0 + r Y_1 + \ldots + r^n Y_n + \ldots. \tag{114}$$

En effet, r étant < 1 à l'intérieur, la série est encore convergente à l'intérieur, si la série primitive l'était et, comme chaque terme est un polynome harmonique, on a pour tous les points $\Delta V_i = 0$.

2° On peut aussi résoudre le problème de Dirichlet pour un point *extérieur*. Il s'agit de trouver une fonction V_e qui, sur la sphère, se réduit à V_0, qui, à l'extérieur de la sphère, est finie, continue et satisfait à l'équation $\Delta V_e = 0$, enfin qui, à l'infini, tend vers zéro comme $\frac{1}{r}$.

Pour résoudre ce problème, il suffit de remarquer, comme l'a fait W. Thomson, que l'équation (97), qui définit Y_n, ne change pas quand on change n en $-(n+1)$. Or, $r^n Y_n$ est une fonction harmonique, donc $r^{-(n+1)} Y_n$ est également une fonction harmonique.

Si sur la sphère on donne V_0, nous aurons à l'extérieur

$$V_e = \frac{Y_0}{r} + \frac{Y_1}{r^2} + \ldots + \frac{Y_n}{r^{n+1}} + \ldots. \tag{115}$$

Tous les termes sont des fonctions harmoniques et à l'infini la partie principale est $\frac{Y_0}{r}$.

41. **Potentiel d'une simple couche sphérique.** — Étant donnée une sphère, supposons que sur la surface soit répandue une couche matérielle infiniment mince (simple couche). On la définit en donnant la densité superficielle μ en chaque point de la sphère. La masse répandue sur un élément $d\sigma$ sera $\mu\, d\sigma$.

Prenons pour unité le rayon de la sphère, on peut développer μ en une série de fonctions Y_n :

$$\mu = Y_0 + Y_1 + \ldots + Y_n + \ldots.$$

Chaque fonction Y_n dépend de $2n+1$ coefficients arbitraires.

Nous nous proposons de calculer le potentiel de cette couche, à l'extérieur et à l'intérieur de la sphère et sur la sphère. Cherchons à déterminer le potentiel V_0 sur la sphère et à le développer en une série de fonctions sphériques. On aura alors le potentiel intérieur et extérieur par la méthode du problème de Dirichlet. Posons

donc

$$V_0 = Y'_0 + Y'_1 + \ldots + Y'_n + \ldots. \tag{116}$$

Il s'agit de déterminer les fonctions Y'_n ou, plus exactement, les coefficients arbitraires des diverses fonctions Y'_n. On aura alors à l'intérieur et à l'extérieur

$$\left\{\begin{aligned} V_i &= Y'_0 + rY'_1 + \ldots + r^n Y'_n + \ldots, \\ V_e &= \frac{Y'_0}{r} + \frac{Y'_1}{r^2} + \ldots + \frac{Y'_n}{r^{n+1}} + \ldots. \end{aligned}\right. \tag{117}$$

Pour déterminer V_0, écrivons en un point M quelconque de la sphère, c'est-à-dire de la simple couche, la relation connue

$$\frac{dV}{dn_i} + \frac{dV}{dn_e} = -4\pi\mu. \tag{118}$$

1° On a

$$dn_i = -dr \qquad \text{et} \qquad r = 1,$$

d'où

$$\frac{dV}{dn_i} = -\frac{dV_i}{dr} = -\Sigma n r^{n-1} Y'_n = -\Sigma n Y'_n;$$

2° On a de même

$$dn_e = dr \qquad \text{et} \qquad r = 1,$$

d'où

$$\frac{dV}{dn_e} = \frac{dV_e}{dr} = -\Sigma \frac{n+1}{r^{n+2}} Y'_n = -\Sigma(n+1)Y'_n.$$

La relation (118) ci-dessus devient

$$\Sigma(2n+1)Y'_n = 4\pi\Sigma Y_n.$$

Cette relation est vraie pour tous les points de la sphère. Les deux développements constamment égaux représentent donc la même fonction. Comme une fonction n'est développable en fonctions sphériques que d'une seule manière, il faut que les fonctions du même ordre soient les mêmes, c'est-à-dire

$$(2n+1)Y'_n = 4\pi Y_n.$$

On a donc

$$V_0 = 4\pi \sum_0^\infty \frac{Y_n}{2n+1}. \tag{118'}$$

Le problème est ainsi complètement résolu.

Remarque. — On pourrait arriver à ce résultat en appliquant directement le théorème de Green. On isolerait le point M par une demi-sphère intérieure et l'on prendrait $\frac{1}{r}$ pour l'une des fonctions figurant dans le calcul.

CHAPITRE VI.

FONCTIONS DE LAMÉ.

42. Historique. — Ces fonctions se sont présentées tout d'abord dans l'étude de la diffusion et de l'équilibre de la chaleur. La surface d'un corps est supposée à une température donnée : en chaque point il s'agit de déterminer le mouvement de la chaleur et s'il y a lieu l'état d'équilibre atteint au bout d'un certain temps. Fourier et Poisson avaient résolu le problème pour une sphère homogène. Ils avaient résolu aussi le problème pour le volume compris entre deux sphères concentriques. Dans ce dernier cas, la température est donnée en chaque point de la surface extérieure et de la surface intérieure et il faut déterminer le mouvement et l'équilibre. Pour résoudre ces problèmes, on se sert des fonctions sphériques que nous avons reconnues être de la forme $r^n f(\theta) g(\varphi)$.

Le problème pour l'ellipsoïde est resté longtemps sans solution. Lamé l'a résolu en introduisant des fonctions spéciales qu'on appelle maintenant fonctions de Lamé. Quand l'ellipsoïde se réduit à une sphère, les fonctions étudiées par Lamé (*Journal de Liouville*, 1839) se réduisent aux fonctions sphériques, qui, à ce point de vue, sont un cas de dégénérescence des fonctions de Lamé. Nous emploierons les notations de Poincaré dans les *Figures d'équilibre*.

43. Introduction des coordonnées elliptiques. — Considérons les surfaces du second degré

$$\frac{x^2}{\lambda^2 - a^2} + \frac{y^2}{\lambda^2 - b^2} + \frac{z^2}{\lambda^2 - c^2} - 1 = 0, \tag{119}$$

où

$$c < b < a \qquad \text{et} \qquad \lambda^2 - a^2 < \lambda^2 - b^2 < \lambda^2 - c^2.$$

Les surfaces obtenues quand λ varie sont appelées surfaces homofocales. Elles constituent un système triple orthogonal caractérisé chacun par l'une des trois racines en λ^2 de l'équation (119). Par tout point P de l'espace passent trois de ces surfaces : 1° Un ellipsoïde pour lequel la valeur correspondante de λ que nous désignerons par ρ est plus grande que a. — 2° Un hyperboloïde à une nappe H_1 ; la valeur de λ, que nous désignerons par μ, est comprise entre a et b. — 3° Un hyperboloïde à deux nappes H_2 ; la valeur ν de λ est comprise entre b et c. D'ailleurs on ne peut pas avoir $\lambda < c$, autrement on aurait des surfaces imaginaires. Ainsi les trois racines positives de l'équation en λ qui exprime que les surfaces homofocales passent par un point P sont ρ, μ, ν, et l'on a

$$c < \nu < b < \mu < a < \rho.$$

Ces quantités ρ, μ, ν sont les coordonnées elliptiques d'un point de l'espace. A un point P correspond un seul système de valeurs ρ, μ, ν, mais à un système de valeurs ρ, μ, ν correspondent huit points de l'espace : ce sont les huit points d'intersection des surfaces ρ, μ, ν, points qui sont deux à deux symétriques par rapport aux plans de coordonnées.

Donnons-nous donc ρ, μ, ν et calculons x, y, z. On a évidemment l'identité fondamentale qui définit ρ, μ, ν comme les racines de l'équation ci-dessus

$$(120)\qquad \frac{x^2}{\lambda^2-a^2}+\frac{y^2}{\lambda^2-b^2}+\frac{z^2}{\lambda^2-c^2}-1=\frac{(\rho^2-\lambda^2)(\mu^2-\lambda^2)(\nu^2-\lambda^2)}{(\lambda^2-a^2)(\lambda^2-b^2)(\lambda^2-c^2)}.$$

Le coefficient de λ^6 est bien -1 dans les deux membres.

Pour avoir x^2, multiplions les deux membres par λ^2-a^2, puis faisons $\lambda^2=a^2$. On a

$$(121)\qquad x^2=\frac{(\rho^2-a^2)(\mu^2-a^2)(\nu^2-a^2)}{(a^2-b^2)(a^2-c^2)}.$$

On obtient de même pour y et z

$$y^2=\frac{(\rho^2-b^2)(\mu^2-b^2)(\nu^2-b^2)}{(b^2-a^2)(b^2-c^2)},\qquad z^2=\frac{(\rho^2-c^2)(\mu^2-c^2)(\nu^2-c^2)}{(c^2-a^2)(c^2-b^2)}.$$

On obtient toutes les valeurs de x^2, y^2, z^2 en donnant à ρ, μ, ν toutes les valeurs possibles dans leur intervalle de variation. On a

d'ailleurs pour x, y, z un double signe devant le radical. Pour avoir tous les points de l'espace on donnera d'abord à tous les radicaux le signe $+$ et l'on fera varier ρ de $+\infty$ à a, puis de a à $+\infty$, et ainsi de suite en changeant le signe du radical au moment où il s'annule. De même on fera varier μ de a à b, puis de b à a et ν de b à c et de c à b, en changeant le signe du radical quand il s'annule.

44. **Expressions en ρ, μ, ν d'un polynome en x, y, z.** — Considérons un polynome $Q_n(x, y, z)$ de degré n, homogène ou non. Remplaçons x, y, z par leurs valeurs en ρ, μ, ν. Alors Q_n devient symétrique en ρ, μ, ν puisque x, y, z le sont. De plus, il sera de degré n en ρ, à condition de convenir que $\sqrt{\rho^2 - a^2}$ est du premier degré en ρ (pour ρ très grand, cette expression est en effet du premier degré d'infinitude).

Nous allons étudier certaines formes particulières du polynome Q_n et la forme du polynome transformé. Nous distinguerons quatre classes :

Première classe. — Le polynome Q_n est un polynome en x^2, y^2, z^2, ne contenant que des puissances paires. Si k est son degré par rapport à x^2, y^2, z^2, on a $n = 2k$. L'expression transformée est un polynome en ρ, μ, ν, *symétrique* et de degré $2k$ en ρ, en μ, et en ν :

$$Q(x^2, y^2, z^2) = \Phi(\rho^2, \mu^2, \nu^2).$$

Deuxième classe. — Le polynome Q_n est de la forme $x\,P(x^2, y^2, z^2)$, où P est un polynome de degré k en x^2, y^2, z^2, d'où $n = 2k + 1$. L'expression transformée est

$$x\,P(x^2, y^2, z^2) = C\sqrt{\rho^2 - a^2}\sqrt{\mu^2 - a^2}\sqrt{\nu^2 - a^2}\,\Phi(\rho^2, \mu^2, \nu^2).$$

C'est une expression de degré $2k + 1$, d'après les conventions, car Φ est de degré $2k$ et le produit des radicaux est du premier degré en ρ, μ, ν. On aura de même

$$y\,P(x^2, y^2, z^2) = C'\sqrt{\rho^2 - b^2}\sqrt{\mu^2 - b^2}\sqrt{\nu^2 - b^2}\,\Phi(\rho^2, \mu^2, \nu^2),$$
$$z\,P(x^2, y^2, z^2) = C''\sqrt{\rho^2 - c^2}\sqrt{\mu^2 - c^2}\sqrt{\nu^2 - c^2}\,\Phi(\rho^2, \mu^2, \nu^2);$$

C, C′, C″ étant des constantes qui dépendent de a, b, c.

Troisième classe. — Le polynome Q_n est de la forme $yz P(x^2, y^2, z^2)$, qui est de degré $2k+2$, si P est de degré k en x^2, y^2, z^2.

L'expression transformée est

$$\begin{aligned} & yz\, P(x^2, y^2, z^2) \\ & \quad = C_1 \sqrt{(\rho^2 - b^2)(\rho^2 - c^2)} \sqrt{(\mu^2 - b^2)(\mu^2 - c^2)} \sqrt{(\nu^2 - b^2)(\nu^2 - c^2)} \\ & \qquad \times \Phi(\rho^2, \mu^2, \nu^2), \end{aligned}$$

Φ étant du degré $2k$ en ρ, μ, ν, l'expression totale est du degré $2k+2$, avec notre convention. On aura encore les deux expressions

$$\begin{aligned} & zx\, P(x^2, y^2, z^2) \\ & \quad = C'_1 \sqrt{(\rho^2 - c^2)(\rho^2 - a^2)} \sqrt{(\mu^2 - c^2)(\mu^2 - a^2)} \sqrt{(\nu^2 - c^2)(\nu^2 - a^2)} \\ & \qquad \times \Phi(\rho^2, \mu^2, \nu^2); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & xy\, P(x^2, y^2, z^2) \\ & \quad = C''_1 \sqrt{(\rho^2 - a^2)(\rho^2 - b^2)} \sqrt{(\mu^2 - a^2)(\mu^2 - b^2)} \sqrt{(\nu^2 - a^2)(\nu^2 - b^2)} \\ & \qquad \times \Phi(\rho^2, \mu^2, \nu^2). \end{aligned}$$

Quatrième classe. — Q_n est de la forme $xyz P(x^2, y^2, z^2)$, donc $n = 2k+3$. L'expression transformée est encore de degré $2k+3$, avec nos conventions

$$xyz\, P(x^2, y^2, z^2) = C_2 \prod_{\rho, \mu, \nu} \sqrt{(\rho^2 - a^2)(\rho^2 - b^2)(\rho^2 - c^2)}\, \Phi(\rho^2, \mu^2, \nu^2).$$

En résumé, nous avons considéré quatre classes de polynomes. La première classe comprend un seul type de degré pair, la deuxième trois types de degré impair, la troisième trois types également de degré pair, enfin la quatrième un seul type de degré impair. Nous avons donc quatre types de degré impair et quatre types de degré pair, en deux classes chacun. Ces huit types suffisent d'ailleurs dans tous les cas puisqu'un polynome quelconque P_n peut toujours être décomposé en une somme de polynomes rentrant dans les types considérés.

Les expressions transformées sont *symétriques* en ρ, μ, ν, et du même degré que les polynomes primitifs en x, y, z, moyennant la convention indiquée.

45. **Problème inverse.** — Nous allons maintenant, en sens inverse, examiner diverses formes spéciales des expressions transformées et voir à quelle forme des polynomes Q_n elles correspondent.

Soit $f(\rho^2)$ un polynome de degré k en ρ^2. C'est donc un polynome de degré pair $2k$, en ρ. Soient de même $f(\mu^2)$ et $f(\nu^2)$ *le même* polynome en μ^2, ν^2.

1° Considérons la fonction symétrique en ρ, μ, ν, constituée par le produit $f(\rho^2)f(\mu^2)f(\nu^2)$. Puisque c'est une fonction symétrique des racines de l'équation (119)

$$\frac{x^2}{\lambda^2-a^2}+\frac{y^2}{\lambda^2-b^2}+\frac{z^2}{\lambda^2-c^2}-1=0,$$

c'est une fonction rationnelle des coefficients de cette équation et par conséquent une fonction rationnelle (et même entière) de x^2, y^2, z^2.

Supposons en effet que $f(\rho^2)$ soit décomposé en facteurs, ainsi que $f(\mu^2)$ et $f(\nu^2)$ qui ont les mêmes racines, on a

$$\begin{aligned} f(\rho^2) &= (\rho^2-\alpha_1)(\rho^2-\alpha_2)\ldots(\rho^2-\alpha_k),\\ f(\mu^2) &= (\mu^2-\alpha_1)(\mu^2-\alpha_2)\ldots(\mu^2-\alpha_k),\\ f(\nu^2) &=)\nu^2-\alpha_1)(\nu^2-\alpha_2)\ldots(\nu^2-\alpha_k). \end{aligned}$$

Le produit considéré est donc de la forme

$$f(\rho^2)f(\mu^2)f(\nu^2)=\prod_{\rho,\mu,\nu}[(\rho^2-\alpha_i)(\mu^2-\alpha_i)(\nu^2-\alpha_i)].$$

Revenons alors à l'identité fondamentale (120) et faisons-y $\lambda^2=\alpha_i$; on a

$$(122)\quad (\rho^2-\alpha_i)(\mu^2-\alpha_i)(\nu^2-\alpha_i)=C\left(\frac{x^2}{\alpha_i-a^2}+\frac{y^2}{\alpha_i-b^2}+\frac{z^2}{\alpha_i-c^2}-1\right)$$

et le produit considéré peut s'écrire

$$\begin{aligned}(123)\quad f(\rho^2)f(\mu^2)f(\nu^2) &= C'\Pi\left(\frac{x^2}{\alpha_i-a^2}+\frac{y^2}{\alpha_i-b^2}+\frac{z^2}{\alpha_i-c^2}-1\right)\\ &= Q(x^2, y^2, z^2)\end{aligned}$$

qui est un polynome spécial, décomposé en facteurs quadratiques en x, y, z.

2° Considérons maintenant les expressions

$$\sqrt{\rho^2 - a^2}\, f(\rho^2), \quad \sqrt{\mu^2 - a^2}\, f(\mu^2), \quad \sqrt{\nu^2 - a^2}\, f(\nu^2),$$

et cherchons de quel polynome est dérivé leur produit.

Le produit des trois radicaux n'est pas autre chose que x à un facteur constant près. Nous venons de voir la forme du produit des trois fonctions f. On aura donc, en désignant par Q le polynome de la forme précédente décomposé en facteurs quadratiques, les trois formes suivantes, à un facteur constant près :

$$\sqrt{\rho^2 - a^2}\, f(\rho^2) \sqrt{\mu^2 - a^2}\, f(\mu^2) \sqrt{\nu^2 - a^2}\, f(\nu^2) = x\, Q(x^2, y^2, z^2),$$
$$\sqrt{\rho^2 - b^2}\, f(\rho^2) \sqrt{\mu^2 - b^2}\, f(\mu^2) \sqrt{\nu^2 - b^2}\, f(\nu^2) = y\, Q(x^2, y^2, z^2),$$
$$\sqrt{\rho^2 - c^2}\, f(\rho^2) \sqrt{\mu^2 - c^2}\, f(\mu^2) \sqrt{\nu^2 - c^2}\, f(\nu^2) = z\, Q(x^2, y^2, z^2).$$

3° Considérons les expressions suivantes et leur produit

$$\sqrt{(\rho^2 - a^2)(\rho^2 - b^2)}\, f(\rho^2),$$
$$\sqrt{(\mu^2 - a^2)(\mu^2 - b^2)}\, f(\mu^2),$$
$$\sqrt{(\nu^2 - a^2)(\nu^2 - b^2)}\, f(\nu^2),$$

on voit immédiatement que l'on a, à des facteurs constants près, pour l'expression des trois produits :

$$\prod_{\rho, \mu, \nu} \sqrt{(\rho^2 - a^2)(\rho^2 - b^2)}\, f(\rho^2) = xy\, Q(x^2, y^2, z^2),$$
$$\prod_{\rho, \mu, \nu} \sqrt{(\rho^2 - b^2)(\rho^2 - c^2)}\, f(\rho^2) = yz\, Q(x^2, y^2, z^2),$$
$$\prod_{\rho, \mu, \nu} \sqrt{(\rho^2 - c^2)(\rho^2 - a^2)}\, f(\rho^2) = zx\, Q(x^2, y^2, z^2).$$

4° Enfin on voit de même que le produit des trois expressions analogues à

$$\sqrt{(\rho^2 - a^2)(\rho^2 - b^2)(\rho^2 - c^2)}\, f(\rho^2)$$

sera égal à

$$xyz\, Q(x^2, y^2, z^2).$$

En résumé, les polynomes particuliers que nous venons de considérer se décomposent en quatre classes, qui se ramènent identiquement aux quatre classes x^2, y^2, z^2, considérées plus haut :

deux classes d'un seul type, deux classes de trois types; quatre classes paires, quatre impaires.

Comme tous les polynomes peuvent se décomposer en polynomes de nos huit types en x^2, y^2, z^2, ils pourront tous également se ramener à nos huit types de polynomes en ρ, μ, ν.

46. Élément linéaire et équation de Laplace en coordonnées elliptiques. — Calculons d'abord ds^2. Le système des surfaces ρ, μ, ν étant triplement orthogonal, on a simplement

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = \alpha^2\, d\rho^2 + \beta^2\, d\mu^2 + \gamma^2\, d\nu^2.$$

Pour calculer $d\rho$, $d\mu$, $d\nu$, prenons les dérivées logarithmiques des expressions x^2, y^2, z^2 (121); on a

$$\frac{dx}{x} = \frac{\rho\, d\rho}{\rho^2 - a^2} + \frac{\mu\, d\mu}{\mu^2 - a^2} + \frac{\nu\, d\nu}{\nu^2 - a^2},$$

$$\frac{dy}{y} = \frac{\rho\, d\rho}{\rho^2 - b^2} + \frac{\mu\, d\mu}{\mu^2 - b^2} + \frac{\nu\, d\nu}{\nu^2 - b^2},$$

$$\frac{dz}{z} = \frac{\rho\, d\rho}{\rho^2 - c^2} + \frac{\mu\, d\mu}{\mu^2 - c^2} + \frac{\nu\, d\nu}{\nu^2 - c^2};$$

$$\begin{aligned} ds^2 = \quad & \rho^2\, d\rho^2 \left[\frac{x^2}{(\rho^2 - a^2)^2} + \frac{y^2}{(\rho^2 - b^2)^2} + \frac{z^2}{(\rho^2 - c^2)^2} \right] \\ & + \mu^2\, d\mu^2 \left[\frac{x^2}{(\mu^2 - a^2)^2} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \right] \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Pour calculer l'expression entre crochets, partons de l'identité fondamentale (120) écrite

$$\frac{x^2}{\lambda^2 - a^2} + \frac{y^2}{\lambda^2 - b^2} + \frac{z^2}{\lambda^2 - c^2} - 1 = (\rho^2 - \lambda^2)\, \frac{(\mu^2 - \lambda^2)(\nu^2 - \lambda^2)}{(\lambda^2 - a^2)(\lambda^2 - b^2)(\lambda^2 - c^2)}.$$

Prenons les dérivées des deux membres par rapport à λ^2, on a

$$\begin{aligned} & -\left[\frac{x^2}{(\lambda^2 - a^2)^2} + \frac{y^2}{(\lambda^2 - b^2)^2} + \frac{z^2}{(\lambda^2 - c^2)^2} \right] \\ & = -\frac{(\mu^2 - \lambda^2)(\nu^2 - \lambda^2)}{(\lambda^2 - a^2)(\lambda^2 - b^2)(\lambda^2 - c^2)} \\ & \quad + (\rho^2 - \lambda^2) \frac{d}{d\lambda^2} \frac{(\mu^2 - \lambda^2)(\nu^2 - \lambda^2)}{(\lambda^2 - a^2)(\lambda^2 - b^2)(\lambda^2 - c^2)}, \end{aligned}$$

λ étant arbitraire; faisons $\lambda = \rho$ dans cette identité, il vient

$$(124)\quad \frac{x^2}{(\rho^2-a^2)^2}+\frac{y^2}{(\rho^2-b^2)^2}+\frac{z^2}{(\rho^2-c^2)^2}=\frac{(\mu^2-\rho^2)(\nu^2-\rho^2)}{(\rho^2-a^2)(\rho^2-b^2)(\rho^2-c^2)}.$$

On a donc pour α^2, et de même pour β^2 et γ^2 :

$$\alpha^2=\frac{\rho^2(\mu^2-\rho^2)(\nu^2-\rho^2)}{(\rho^2-a^2)(\rho^2-b^2)(\rho^2-c^2)},$$

$$\beta^2=\frac{\mu^2(\nu^2-\mu^2)(\rho^2-\mu^2)}{(\mu^2-a^2)(\mu^2-b^2)(\mu^2-c^2)},$$

$$\gamma^2=\frac{\nu^2(\rho^2-\nu^2)(\mu^2-\nu^2)}{(\nu^2-a^2)(\nu^2-b^2)(\nu^2-c^2)},$$

expressions que nous pouvons écrire avec Poincaré

$$(125)\quad \left\{\begin{aligned} \alpha^2&=\frac{(\mu^2-\rho^2)(\nu^2-\rho^2)}{A^2}, & A^2&=\frac{(\rho^2-a^2)(\rho^2-b^2)(\rho^2-c^2)}{\rho^2};\\ \beta^2&=\frac{(\nu^2-\mu^2)(\rho^2-\mu^2)}{B^2}, & B^2&=\frac{(\mu^2-a^2)(\mu^2-b^2)(\mu^2-c^2)}{\mu^2};\\ \gamma^2&=\frac{(\rho^2-\nu^2)(\mu^2-\nu^2)}{C^2}, & C^2&=\frac{(\nu^2-a^2)(\nu^2-b^2)(\nu^2-c^2)}{\nu^2}, \end{aligned}\right.$$

où A^2 dépend seulement de ρ, B^2 seulement de μ, et C^2 seulement de ν. Écrivons l'équation de Laplace en ρ, μ, ν : on a, d'après (91),

$$\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{\beta\gamma}{\alpha}\frac{\partial V}{\partial\rho}\right)+\frac{\partial}{\partial\mu}\left(\frac{\gamma\alpha}{\beta}\frac{\partial V}{\partial\mu}\right)+\frac{\partial}{\partial\nu}\left(\frac{\alpha\beta}{\gamma}\frac{\partial V}{\partial\nu}\right)=0;$$

or

$$\frac{\beta\gamma}{\alpha}=\sqrt{\frac{-A^2}{B^2C^2}(\mu^2-\nu^2)^2}, \qquad \ldots;$$

multiplions alors par i, il vient

$$\frac{\partial}{\partial\rho}\left[\frac{A}{BC}(\mu^2-\nu^2)\frac{\partial V}{\partial\rho}\right]+\frac{\partial}{\partial\mu}\left[\frac{B}{CA}(\nu^2-\rho^2)\frac{\partial V}{\partial\mu}\right]+\frac{\partial}{\partial\nu}\left[\frac{C}{AB}(\rho^2-\mu^2)\frac{\partial V}{\partial\nu}\right]=0$$

ou enfin, en faisant sortir du signe de dérivation les termes indépendants de la variable de dérivation et multipliant par ABC,

$$(126)\quad \begin{aligned} &(\mu^2-\nu^2)A\frac{\partial}{\partial\rho}\left(A\frac{\partial V}{\partial\rho}\right)\\ &+(\nu^2-\rho^2)B\frac{\partial}{\partial\mu}\left(B\frac{\partial V}{\partial\mu}\right)\\ &+(\rho^2-\mu^2)C\frac{\partial}{\partial\nu}\left(C\frac{\partial V}{\partial\nu}\right)=0. \end{aligned}$$

Il est commode ici de faire un *changement de variables* qui est

tout indiqué et qui introduit les fonctions elliptiques. En effet, l'expression $A\frac{\partial}{\partial\rho}\left(A\frac{\partial V}{\partial\rho}\right)$, où $A\frac{\partial}{\partial\rho}$ apparaît deux fois, conduit à poser

$$(127)\qquad \frac{d\rho}{A} = du, \qquad \frac{d\mu}{B} = dv, \qquad \frac{d\nu}{C} = dw,$$

c'est-à-dire

$$(127')\qquad \frac{\rho\, d\rho}{\sqrt{(\rho^2-a^2)(\rho^2-b^2)(\rho^2-c^2)}} = du, \qquad \ldots,$$

où ρ sera fonction uniquement de u et, réciproquement, μ fonction de v et ν fonction de w.

Comme on a

$$\frac{\partial V}{\partial u} = \frac{\partial V}{\partial\rho}\frac{d\rho}{du} = A\frac{\partial V}{\partial\rho} \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial}{\partial u}(F) = A\frac{\partial}{\partial\rho}(F),$$

il viendra finalement

$$(128)\qquad (\mu^2-\nu^2)\frac{\partial^2 V}{\partial u^2} + (\nu^2-\rho^2)\frac{\partial^2 V}{\partial v^2} + (\rho^2-\mu^2)\frac{\partial^2 V}{\partial w^2} = 0.$$

Il faut maintenant exprimer ρ, μ, ν en fonctions de u, v, w, et c'est ici que s'introduisent les fonctions elliptiques. Lamé avait utilisé les notations de Legendre et de Jacobi, qui ont l'inconvénient de n'être pas symétriques. Poincaré a utilisé les notations de Weierstrass.

47. Rappel de quelques notions sur les fonctions elliptiques. — 1° Le point de départ est celui-ci. Considérons l'équation

$$(129)\qquad \frac{ds}{\sqrt{4s^3-g_2 s-g_3}} = dz.$$

Le polynome sous le radical est du troisième degré, g_2 et g_3 sont des constantes. En intégrant, on tire s en fonction de z en supposant $s=\infty$ pour $z=0$, et l'on pose $s=pz$ qui est la fonction inverse de la fonction $z(s)$ définie par

$$\int_\infty^s \frac{ds}{\sqrt{4s^3-g_2 s-g_3}} = z.$$

2° La fonction pz est la fonction elliptique fondamentale [1].

[1] *Voir* APPEL et LACOUR, *Précis de la Théorie des fonctions elliptiques* (Gauthier-Villars).

Pour $z = 0$, on a $s = \infty$, et $z = 0$ est un pôle d'ordre 2 de pz. En développant pz dans le voisinage de l'origine, on a

$$pz = \frac{1}{z^2} + C_1 z^2 + \ldots.$$

Cette fonction admet deux périodes qu'on désigne par 2ω et $2\omega'$, ce qui donne

$$p(z + 2\omega) = pz, \qquad p(z + 2\omega') = pz.$$

3° Dans le cas qui nous occupe, les racines de l'équation du polynome du troisième degré sous le radical sont réelles :

$$(130) \quad 4s^3 - g_2 s - g_3 = 4(s - e_1)(s - e_2)(s - e_3) \qquad (e_3 < e_2 < e_1).$$

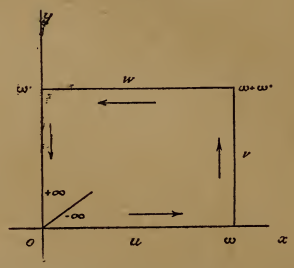
On sait que g_2 est alors négatif. On a de plus, le coefficient de s^2 étant nul,

$$e_1 + e_2 + e_3 = 0.$$

Ici, ω est réel, et l'on peut le prendre positif; de plus, ω' est purement imaginaire et l'on peut lui donner le signe $+$.

4° Ce qui nous intéresse, ce sont les valeurs de z qui rendent s réel. Dans le cas actuel, où e_1, e_2, e_3 sont réels, s est réel quand z

Fig. 32.



se déplace sur les côtés du rectangle ayant pour sommets o, ω, $\omega + \omega'$, ω' (*fig.* 32).

Partons de o, pz est infini. Quand z croît de o à ω, $s = pz$ décroît de $+\infty$ à e_1. Puis quand z va de ω à $\omega + \omega'$, à ω' enfin à o, pz décroît successivement de e_1 à e_2, à e_3, enfin à $-\infty$. Pour ce dernier point, on voit en effet, par le développement en série, que pz est infini et négatif quand z s'approche de l'origine par valeurs purement imaginaires.

Ainsi quand la variable imaginaire décrit le contour considéré, la fonction pz prend toutes les valeurs réelles comprises entre $+\infty$ et $-\infty$.

Nous allons voir, en ce qui concerne les polynomes de Lamé, qu'il faudra, pour avoir des expressions réelles, que u varie de 0 à ω, v de ω à $\omega+\omega'$, enfin w de $\omega+\omega'$ à ω'.

5° On a, en posant $s = pz = p$,

$$(131)\quad \frac{ds}{dz} = p'z = \sqrt{4s^3 - g_2 s - g_3} = 2\sqrt{(p-e_1)(p-e_2)(p-e_3)},$$

d'où l'on tire, en élevant au carré et dérivant de nouveau,

$$(132)\qquad 2p'p'' = 12p^2p' - g_2p', \qquad p'' = 6p^2 - \frac{1}{2}g_2.$$

6° Enfin nous avons vu qu'en représentant z dans le plan de la variable complexe, pz est réel (dans le cas où e_1, e_2, e_3 sont réels) sur le contour du rectangle des demi-périodes et l'on a

$$p(0) = \pm\infty, \qquad p\omega = e_1, \qquad p(\omega+\omega') = e_2, \qquad p\omega' = e_3.$$

7° On démontre que la fonction $\sqrt{pz - e_1}$ est uniforme. Il y a là quelque chose d'analogue à ce qui se produit en trigonométrie où la fonction $\sqrt{1 - \sin^2 u}$ est uniforme, malgré le radical. On pose

$$(133)\qquad \sqrt{p - e_1} = p_1, \qquad \sqrt{p - e_2} = p_2, \qquad \sqrt{p - e_3} = p_3.$$

Les fonctions p_1, p_2, p_3 sont doublement périodiques aussi, mais n'ont pas tout à fait les mêmes périodes que p. Voici le tableau des changements de signe que subissent ces fonctions par l'addition de 2ω ou de $2\omega'$, ainsi que le tableau de leurs périodes :

(134)

	2ω.	$2\omega'$.	Périodes.	
pz	$+$	$+$	2ω	$2\omega'$
p_1z	$+$	$-$	2ω	$4\omega'$
p_2z	$-$	$-$	4ω	$4\omega'$
p_3z	$-$	$+$	4ω	$2\omega'$

On a par exemple $p' = 2p_1p_2p_3$, la dérivée p' a pour périodes 2ω et $2\omega'$; c'est ce qu'on peut vérifier : en ajoutant 2ω, on voit que p_1 ne change pas de signe, p_2 et p_3 en changent tous deux, ce qui ne change pas le signe. Il en est de même avec $2\omega'$.

48. Notations symétriques et réduites de Weierstrass. — Rappelons-nous les changements de variables qui définissent u, v, w, en fonctions de ρ, μ, ν, ainsi que l'inégalité

$$c^2 < \nu^2 < b^2 < \mu^2 < a^2 < \rho^2.$$

Posons

$$\rho^2 = s + g, \qquad 2\rho\, d\rho = ds$$

et

$$a^2 - g = e_1, \qquad b^2 - g = e_2, \qquad c^2 - g = e_3,$$

où g est défini par la condition $e_1 + e_2 + e_3 = 0$, c'est-à-dire

$$g = \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2).$$

On ramène ainsi les équations (127') en du, dv, dw à la forme réduite de Weierstrass

$$(135) \qquad \frac{ds}{2\sqrt{(s-e_1)(s-e_2)(s-e_3)}} = du,$$

où l'on a $e_3 < e_2 < e_1$, car $c^2 < b^2 < a^2$.

On aura alors $s = pu$ sous la condition que, pour $s = 0$, u soit infini.

On aura donc $\rho^2 = pu + g$. Or nous savons que ρ^2 doit varier de $+\infty$ à a^2. Alors s doit varier de $+\infty$ à $a^2 - g = e_1$, il suffit donc de faire varier u de 0 à ω sur l'axe des quantités réelles.

On aura de même $\mu^2 = pv + g$ et pour que μ^2 soit réel, il faudra faire varier v de ω à $\omega + \omega'$, c'est-à-dire pv de e_1 à e_2 et μ^2 de a^2 à b^2.

Enfin, on a $\nu^2 = pw + g$. Il faudra faire varier w de $\omega + \omega'$ à ω', pw de e_2 à e_3 et ν^2 de b^2 à c_2.

Avec ces notations en p et e, les expressions de x^2, y^2, z^2 (121) deviennent plus simples et s'écrivent symétriquement :

$$(136) \qquad \left\{ \begin{aligned} x^2 &= \frac{(pu - e_1)(pv - e_1)(pw - e_1)}{(e_1 - e_2)(e_1 - e_3)}, \\ y^2 &= \frac{(pu - e_2)(pv - e_2)(pw - e_2)}{(e_2 - e_3)(e_2 - e_1)}, \\ z^2 &= \frac{(pu - e_3)(pv - e_3)(pw - e_3)}{(e_3 - e_1)(e_3 - e_2)}. \end{aligned} \right.$$

On voit de plus sur ces formules que chaque parenthèse ayant pour racine une fonction uniforme, x, y, z sont des fonctions

uniformes de u, v, w. En faisant varier u, v, w dans leur domaine de variation, on obtiendra tous les points de l'espace.

L'équation de Laplace prend de même une forme simple et symétrique, car $\mu^2 - \nu^2$ devient $pv - pw$ et ΔV s'écrit d'après (128)

$$(137) \qquad (pv - pw)\frac{\partial^2 V}{\partial u^2} + (pw - pu)\frac{\partial^2 V}{\partial v^2} + (pu - pv)\frac{\partial^2 V}{\partial w^2} = 0.$$

Toute solution de cette équation traduite en x, y, z donnera une fonction $V(x, y, z)$ qui satisfera à l'équation de Laplace.

49. **Fonctions de Lamé et produits de Lamé.** — 1° Prenons l'équation de Laplace sous la forme $\Delta V = 0$ et proposons-nous de chercher des polynomes en x, y, z de degré n, qui satisfont à cette équation. Quand on passe des coordonnées x, y, z aux coordonnées ρ, μ, ν l'équation $\Delta V = 0$ prend la forme (126) et V devient une fonction entière algébrique de ρ et des radicaux $\sqrt{\rho^2 - a^2}$, $\sqrt{\rho^2 - b^2}$, $\sqrt{\rho^2 - c^2}$, de μ, de ν et des radicaux correspondants. Nous avons vu que V est symétrique en ρ, μ, ν et qu'il est de degré n séparément en ρ, en μ et en ν, à condition de considérer les radicaux comme étant du premier degré. Enfin, quand on passe des coordonnées x, y, z aux coordonnées u, v, w, alors V devient une fonction algébrique, symétrique, entière des quantités

$$pu, \quad \sqrt{pu - e_1}, \quad \sqrt{pu - e_2}, \quad \sqrt{pu - e_3}, \quad pv, \quad \ldots$$

et ΔV prend la forme (137).

Réciproquement, si l'on prend de telles fonctions symétriques de ρ, μ, ν ou de u, v, w, en remontant aux x, y, z, on retrouvera des polynomes.

2° Lamé cherche toutes les solutions de cette nature et les trouve toutes en essayant les solutions de la forme

$$V = f(\rho^2) f(\mu^2) f(\nu^2),$$

où f est un polynome, le même dans les trois facteurs.

Cherchons d'abord les solutions de la forme

$$V = RMN,$$

où R dépend seulement de ρ^2, M seulement de μ^2, et N de ν^2.

Substituons cette valeur de V dans (126), on a

$$A\frac{\partial}{\partial\rho}A\frac{\partial RMN}{\partial\rho} = AMN\frac{d}{d\rho}\left(A\frac{dR}{d\rho}\right),$$

et il vient

$$(\mu^2-\nu^2)AMN\frac{d}{d\rho}\left(A\frac{dR}{d\rho}\right)$$
$$+(\nu^2-\rho^2)BNR\frac{d}{d\mu}\left(B\frac{dM}{d\mu}\right)+(\rho^2-\mu^2)CRM\frac{d}{d\nu}\left(C\frac{dN}{d\nu}\right)=0.$$

En divisant tout par RMN on obtient l'expression

$$(138)\qquad (\mu^2-\nu^2)\frac{A}{R}\frac{d}{d\rho}\left(A\frac{dR}{d\rho}\right)$$
$$+(\nu^2-\rho^2)\frac{B}{M}\frac{d}{d\mu}\left(B\frac{dM}{d\mu}\right)+(\rho^2-\mu^2)\frac{C}{N}\frac{d}{d\nu}\left(C\frac{dN}{d\nu}\right)=0,$$

où le coefficient de $\mu^2-\nu^2$ est fonction de ρ seulement, celui de $\nu^2-\rho^2$ fonction de μ et celui de $\rho^2-\mu^2$ fonction de ν. Ajoutons à cette équation les deux identités suivantes :

$$(\mu^2-\nu^2)1+(\nu^2-\rho^2)1+(\rho^2-\mu^2)1=0,$$
$$(\mu^2-\nu^2)\rho^2+(\nu^2-\rho^2)\mu^2+(\rho^2-\mu^2)\nu^2=0,$$

on obtient ainsi trois équations linéaires homogènes, par rapport aux quantités $\mu^2-\nu^2$, $\nu^2-\rho^2$, $\rho^2-\mu^2$. Ces trois quantités ne sont pas nulles toutes à la fois. Le déterminant des coefficients doit donc être nul. Il existe ainsi une relation linéaire et homogène entre les coefficients d'une même colonne. On aura donc, K et H étant des constantes,

$$(139)\qquad \begin{cases} \dfrac{A}{R}\dfrac{d}{d\rho}\left(A\dfrac{dR}{d\rho}\right)=K\rho^2+H,\\[2ex] \dfrac{B}{M}\dfrac{d}{d\mu}\left(B\dfrac{dM}{d\mu}\right)=K\mu^2+H,\\[2ex] \dfrac{C}{N}\dfrac{d}{d\nu}\left(C\dfrac{dN}{d\nu}\right)=K\nu^2+H. \end{cases}$$

ou, d'après (127),

$$(139')\qquad \begin{cases} \dfrac{d^2R}{du^2}=(K\rho^2+H)R,\\[2ex] \dfrac{d^2M}{dv^2}=(K\mu^2+H)M.\\[2ex] \dfrac{d^2N}{dw^2}=(K\nu^2+H)N. \end{cases}$$

On a ainsi trois équations qui définissent R, M, N, et qui sont linéaires en R, en M et en N, car on peut les écrire

$$(139'') \qquad \frac{A^2}{R}\frac{d^2R}{d\rho^2} + \frac{AA'}{R}\frac{dR}{d\rho} = K\rho^2 + H, \qquad \ldots.$$

Les coefficients sont de plus des polynomes rationnels en ρ, car A^2 et sa dérivée AA' sont rationnels en ρ.

Mais il ne faudra pas prendre de ces équations une solution quelconque. R par exemple devra être un polynome par rapport à ρ, $\sqrt{\rho^2 - a^2}$, $\sqrt{\rho^2 - b^2}$, $\sqrt{\rho^2 - c^2}$. Rien ne prouve pour le moment qu'une telle solution existe.

Quand on aura une solution $R = f(\rho^2)$ de la première équation, $M = f(\mu^2)$ sera une solution de la seconde et $N = f(\nu^2)$ de la troisième, où f représente la même expression. Les fonctions $f(\rho^2)$, $f(\mu^2)$, $f(\nu^2)$ s'appellent les fonctions de Lamé et les produits de deux ou trois de ces fonctions s'appellent les produits de Lamé.

En recommençant les mêmes raisonnements et les mêmes calculs à partir de l'équation (137) et en désignant par R, M, N des fonctions de u, v, w, on trouve que l'équation qui définit R s'écrit de même

$$\frac{d^2R}{du^2} - [K(pu + g) + H]R = 0$$

ou, en posant $h = Kg + H$,

$$(140) \qquad \frac{d^2R}{du^2} - (Kpu + h)R = 0.$$

où les constantes K et h doivent être convenablement déterminées.

50. **Recherche de solutions particulières.** — Lamé a donné de ces équations des solutions se rapportant aux quatre classes déjà étudiées plus haut. Si f désigne un polynome de degré k en ρ^2, n étant le degré total de R en ρ, on a :

(I) $\quad R = f(\rho^2) \qquad (n = 2k$; degré pair, une forme);

(II) $\quad R = \sqrt{\rho^2 - a^2}\, f(\rho^2), \qquad R = \sqrt{\rho^2 - b^2}\, f(\rho^2), \qquad R = \sqrt{\rho^2 - c^2}\, f(\rho^2)$
$(n = 2k + 1$; degré impair, trois formes);

(III) $\quad R = \sqrt{(\rho^2 - a^2)(\rho^2 - b^2)}\, f(\rho^2), \qquad \ldots$
$(n = 2k + 2$; degré pair, trois formes);

(IV) $\quad R = \sqrt{(\rho^2 - a^2)(\rho^2 - b^2)(\rho^2 - c^2)}\, f(\rho^2)$
$(n = 2k + 3$; degré impair, une forme).

On a quatre formes de degré pair, quatre de degré impair en ρ, soit en tout huit formes pour chaque entier k, au moins à partir de $k = 1$.

Si nous remplaçons les expressions en ρ par les expressions correspondantes en pu, nous aurons

$$pu = \frac{1}{u^2} + \ldots, \qquad \sqrt{pu - e_1} = \frac{1}{u} + \ldots,$$

$$\sqrt{pu - e_1}\, f(pu) = \frac{1}{u}\,\frac{1}{u^{2k}} + \ldots = \frac{1}{u^n} + \ldots.$$

Les expressions R auront donc des formes analogues à celles en ρ et qui seront du même ordre en $\frac{1}{u}$, car f est du degré k en pu et chaque radical est de l'ordre de $\frac{1}{u}$. L'ordre total sera encore n.

Les considérations précédentes permettent de fixer la valeur de K dans l'équation différentielle (140).

Supposons en effet qu'il existe des solutions de l'une des quatre classes indiquées et que cette solution soit d'ordre n. En développant cette solution par rapport aux puissances décroissantes de $\frac{1}{u}$, on aura

$$R = \frac{1}{u^n} + \ldots, \qquad \frac{dR}{du} = -\frac{n}{u^{n+1}} + \ldots, \qquad \frac{d^2R}{du^2} = \frac{n(n+1)}{u^{n+2}} + \ldots.$$

En portant ces valeurs dans l'équation différentielle il vient

$$\frac{n(n+1)}{u^{n+2}} + \ldots = \left(\frac{1}{u^n} + \ldots\right)\left(\frac{K}{u^2} + \ldots\right),$$

d'où, en égalant les coefficients de $u^{-(n+2)}$,

$$K = n(n+1).$$

Ainsi la constante K est déterminée dès qu'on se donne l'ordre de la fonction que l'on cherche. L'équation prendra alors la forme

$$(141) \quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{d^2R}{du^2} = [n(n+1)pu + h]R \\ &\text{ou} \\ &A\frac{d}{d\rho}\left(A\frac{dR}{d\rho}\right) = [n(n+1)\rho^2 + H]R. \end{aligned} \right.$$

Elle contient encore une constante. On peut déterminer cette

constante de façon que la solution soit de l'un des types indiqués. Si l'on n'assujettissait pas la solution à cette condition, on pourrait encore intégrer l'équation, comme l'a fait Hermite, et la solution générale serait donnée par des fonctions doublement périodiques de seconde espèce. Les travaux d'Hermite sur cette question ont été le point de départ de travaux importants sur l'intégration des équations différentielles linéaires, dont les coefficients sont doublement périodiques, travaux que domine un théorème de M. Picard.

Lamé s'est occupé seulement du cas où la solution est de l'un des types indiqués.

1° *Degré pair.* — Soit $n = 2k$ ou $2k + 2$. Alors R appartient à la classe I ou à la classe III. On a d'abord dans la classe I

$$R = f(pu) = p^k u + \alpha_1 p^{k-1} u + \alpha_2 p^{k-2} u + \ldots + \alpha_{k-1} pu + \alpha_k.$$

Nous allons voir qu'il y a des solutions à condition que h ait des valeurs spéciales, qui soient les racines d'une certaine équation algébrique. Prenons en effet les deux premières dérivées de R :

$$\frac{dR}{du} = [kp^{k-1} u + (k-1)\alpha_1 p^{k-2} u + \ldots + \alpha_{k-1}]p' u,$$

$$\frac{d^2R}{du^2} = [k(k-1)p^{k-2}u + (k-1)(k-2)\alpha_1 p^{k-3}u + \ldots]p'^2 u + [kp^{k-1}u + \ldots]p'' u.$$

Remplaçons p' et p'' par leurs valeurs (131) et portons $\frac{d^2R}{du^2}$ et R dans l'équation différentielle (141), elle devient

$$[k(k-1)p^{k-2} + \ldots](4p^3 - g_2 p - g_3) + [kp^{k-1} + \ldots]\left(6p^2 - \frac{1}{2}g_2\right)$$
$$= [n(n+1)p + h][p^k + \alpha_1 p^{k-1} + \ldots].$$

En égalant les coefficients des termes du plus haut degré en p, c'est-à-dire du terme p^{k+1}, on a

$$4k(k-1) + 6k = n(n+1) \qquad \text{ou} \qquad 2k(2k+1) = n(n+1).$$

Cette équation donne $n = 2k$ et détermine le degré k du polynome en p. Les coefficients du terme en p^k donnent

$$(142) \qquad 4(k-1)(k-2)\alpha_1 + 6(k-1)\alpha_1 = n(n+1)\alpha_1 + h$$

ou

$$2(k-1)(2k-1)\alpha_1 = n(n+1)\alpha_1 + h$$
$$-h = 2(4k-1)\alpha_1 = 2(2n-1)\alpha_1.$$

Cette équation détermine α_1 en fonction de h, par une expression du premier degré en h. On obtiendra ensuite α_2 par une expression du premier degré en α_1 et en h, mais contenant le produit $\alpha_1 h$. Elle sera donc du second degré en h et ainsi de suite. En égalant à o le terme constant de l'identité, on obtiendra une dernière relation entre $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ et h. En remplaçant dans cette relation tous les α par leurs valeurs en fonction de h, on obtiendra finalement une équation $C(h) = 0$ de degré $k+1$, dont toutes les racines sont réelles. A chaque racine, correspondra une solution du type considéré. L'équation en h ainsi obtenue est l'équation caractéristique du cas étudié. Nous l'écrirons

$$C_{k+1}^{I}(h) = 0. \tag{143}$$

Il faudra ensuite porter ces $k+1$ racines dans les valeurs des α pour obtenir les $k+1$ solutions. Si certaines racines en h étaient imaginaires, il en serait de même de certains coefficients α. Par exemple α_1 étant une fonction linéaire de h, si h est imaginaire, α_1 le sera aussi. De même si deux valeurs de h sont distinctes, les valeurs correspondantes de α_1, et par conséquent les solutions, seront également distinctes.

Dans la classe III l'expression R s'écrira

$$R = \sqrt{pu - e_1}\sqrt{pu - e_2}(p^{k-1}u + \beta_1 p^{k-2}u + \ldots + \beta_{k-1}).$$

Le polynome en pu commence par p^{k-1} de façon que le produit commence par p^{2k}, car on a posé encore ici $n = 2k$, et non pas $2k+2$ comme dans le tableau général pour la troisième classe. On déterminera les $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{k-1}$ comme dans le cas précédent. Il y a maintenant $k-1$ coefficients et k équations. En éliminant ces $k-1$ coefficients, on obtiendra donc une équation caractéristique de degré k en h. Si nous désignons par III_1, III_2, III_3 chacune des trois formes de cette classe, on aura les équations caractéristiques

$$C_k^{III_1}(h) = 0, \qquad C_k^{III_2}(h) = 0, \qquad C_k^{III_3}(h) = 0, \tag{144}$$

qui nous donneront chacune k valeurs de h, à chacune desquelles correspondra une valeur de R, et aussi une fonction M et une fonction N.

Pour n pair le nombre total des fonctions de Lamé sera donc $k+1$ fonctions de la classe I et $3k$ fonctions de la classe III, soit en tout $4k+1=2n+1$ fonctions de Lamé.

2° *Degré impair.* — Soit la classe II, on a $n=2k+1$ et

$$R=\sqrt{pu-e_1}(p^k+\alpha_1 p^{k-1}+\ldots+\alpha_k).$$

Le polynome en p^k est d'ordre $2k$ en $\frac{1}{u}$. Il y a donc k coefficients et $k+1$ équations. L'équation caractéristique s'écrira $C_{k+1}^{II}(h)=0$.

Nous aurons donc à envisager les trois équations

$$(145)\qquad C_{k+1}^{II_1}(h)=0,\qquad C_{k+1}^{II_2}(h)=0,\qquad C_{k+1}^{II_3}(h)=0,$$

où l'exposant II_1 représente la forme $\sqrt{pu-e_1}(p^k+\ldots)$, ...

Nous aurons donc $3(k+1)$ solutions de la classe II.

Pour la classe IV, on a R de la forme

$$R=\sqrt{pu-e_1}\sqrt{pu-e_2}\sqrt{pu-e_3}(p^{k-1}+\beta_1 p^{k-2}+\ldots+\beta_{k-1}),$$

expression de degré $n=2k+1$. Il y a $k-1$ coefficients et k relations. L'équation caractéristique unique est de degré k :

$$(146)\qquad C_k^{IV}(h)=0.$$

Pour n impair, nous avons donc $3(k+1)$ solutions de la classe II et k solutions de la classe IV, soit en tout $2(2k+1)+1=2n+1$ solutions.

Dans tous les cas, il y a donc $2n+1$ fonctions de Lamé.

Ayant obtenu ainsi pour n donné les $2n+1$ fonctions R, on en déduira les $2n+1$ fonctions M et les $2n+1$ fonctions N, en y remplaçant R par μ, puis par v, ou bien u par v, puis par w. On aura ainsi le tableau suivant des fonctions de Lamé d'ordre n :

$$(147)\qquad \begin{cases} R_n^1, & R_n^2, & \ldots, & R_n^i, & \ldots, & R_n^{2n+1}, \\ M_n^1, & M_n^2, & \ldots, & M_n^i, & \ldots, & M_n^{2n+1}, \\ N_n^1, & N_n^2, & \ldots, & N_n^i, & \ldots, & N_n^{2n+1}. \end{cases}$$

En faisant le produit de trois fonctions de Lamé correspondantes, on a un produit de Lamé $R_n^i M_n^i N_n^i$ et il y en aura $2n+1$ en tout. Si nous revenons aux coordonnées rectangulaires, chacun de ces produits sera un polynome en x, y, z de degré n, harmonique, non

homogène. Il y a $2n+1$ de ces polynomes :

$$Q_n^1(x, y, z), \quad Q_n^2(x, y, z), \quad \ldots, \quad Q_n^{2n+1}(x, y, z).$$

En faisant une combinaison linéaire des $2n+1$ produits de Lamé, on peut écrire

$$Q(x, y, z) = \sum_{i=1}^{i=2n+1} A_i R_n^i M_n^i N_n^i,$$

où les A_i sont $2n+1$ coefficients arbitraires, et en revenant aux coordonnées x, y, z, on a encore une solution de $\Delta V = 0$, qui dépend de $2n+1$ coefficients arbitraires. Cette combinaison des $Q_n^i(x, y, z)$, nous la désignerons par $Q(x, y, z)$.

51. Les équations caractéristiques en h ont toutes leurs racines réelles. — Voici la démonstration donnée par Liouville et basée sur la représentation du rectangle de la fonction pz dans le plan des variables complexes. Nous allons faire la démonstration pour le cas des fonctions de Lamé de la première classe. Elle s'étend facilement aux autres cas. Pour plus de commodité aussi, nous considérerons la fonction N au lieu de R.

Soit donc la fonction $N(w)$. Prenons N_1 et N_2 deux fonctions qui correspondent à deux valeurs h_1 et h_2 de h. Pour toute valeur de w comprise entre ω' et $\omega + \omega'$, où la fonction est réelle,

$$\frac{d^2 N_1}{dw^2} = [n(n+1)pw + h_1]N_1, \qquad \frac{d^2 N_2}{dw^2} = [n(n+1)pw + h_2]N_2.$$

Formons alors la combinaison analogue à celle des moments

$$N_2 \frac{d^2 N_1}{dw^2} - N_1 \frac{d^2 N_2}{dw^2} = (h_1 - h_2) N_1 N_2$$

et intégrons entre les limites ω' et $\omega + \omega'$, on a

$$\left[N_2 \frac{dN_1}{dw} - N_1 \frac{dN_2}{dw} \right]_{\omega'}^{\omega+\omega'} = (h_1 - h_2) \int_{\omega'}^{\omega+\omega'} N_1 N_2 \, dw.$$

Or le premier membre est nul. En effet, on a

$$N_1 = p^k w + \alpha_1 p^{k-1} w + \ldots + \alpha_k,$$

$$\frac{dN_1}{dw} = P\, p' w = 2P \sqrt{(pw - e_1)(pw - e_2)(pw - e_3)},$$

P étant un polynome en $p w$, qui reste fini ainsi que $p' w$ sur la droite d'intégration. Or on a encore

$$p(\omega') = e_3 \qquad \text{et} \qquad p(\omega + \omega') = e_2.$$

Donc $\frac{dN_1}{dw}$ s'annule aux deux limites d'intégration. Il en est de même de $\frac{dN_2}{dw}$ Il reste donc

$$(148) \quad (h_1 - h_2)\int_{\omega'}^{\omega+\omega'} N_1 N_2 \, dw = 0 \qquad \text{ou} \qquad \int_{\omega'}^{\omega+\omega'} N_1 N_2 \, dw = 0,$$

si les deux racines sont distinctes. Cette dernière équation rappelle celle des polynomes sphériques et nous allons en déduire la démonstration cherchée.

En effet, l'équation caractéristique est à coefficients réels. Si elle admet la solution imaginaire $h_1 = h' + ih''$, elle admettra aussi la solution $h_2 = h' - ih''$. Considérons alors les polynomes N_1 et N_2 correspondants. Ils contiennent des imaginaires, puisque α_1 au moins les contient, étant linéaire en h. Ils sont donc imaginaires conjugués. On aurait alors

$$N_1 = N' + iN'', \qquad N_2 = N' - iN'', \qquad \int_{\omega'}^{\omega+\omega'} (N'^2 + N''^2)\, dw = 0.$$

Tous les éléments de l'intégrale seraient alors réels et positifs, car on peut écrire

$$w = \omega' + \xi\omega, \qquad dw = \omega \, d\xi,$$

et ξ varie de 0 à 1.

Dans ce cas l'intégrale ne saurait être nulle. Donc il ne peut pas y avoir de racines imaginaires.

Nous verrons encore plus loin que les valeurs de h sont distinctes. Nous verrons de plus que les fonctions N obtenues sont linéairement indépendantes et cela au moyen de la même intégrale.

52. Formation effective des fonctions de Lamé. — 1° Pour $n = 1$, il y a $2n + 1 = 3$ fonctions de Lamé qui sont

$$R = \sqrt{pu - e_1}, \qquad R = \sqrt{pu - e_2}, \qquad R = \sqrt{pu - e_3}$$

ou

$$R = \sqrt{\rho^2 - a^2}, \qquad R = \sqrt{\rho^2 - b^2}, \qquad R = \sqrt{\rho^2 - c^2}$$

et trois autres fonctions analogues pour M et N.

Formons le produit RMN, avec les trois premières fonctions par exemple, on a

$$\mathrm{RMN} = \sqrt{pu - e_1}\sqrt{pv - e_1}\sqrt{pw - e_1} = \mathrm{C}x,$$

à une constante près. Or $\mathrm{C}x$ vérifie bien l'équation $\Delta \mathrm{V} = 0$, on vérifie ainsi que le produit considéré $\sqrt{pu - e_1}\sqrt{pv - e_1}\sqrt{pw - e_1}$ est un produit de Lamé et chacun des radicaux est bien une fonction de Lamé.

2° Pour $n = 2$, on a $2n + 1 = 5$. Nous aurons cinq fonctions en R, en M, en N et cinq produits de Lamé.

Formons d'abord ceux de la classe III, ce sont :

$$\mathrm{R} = \sqrt{pu - e_1}\sqrt{pu - e_2},$$
$$\mathrm{R} = \sqrt{pu - e_2}\sqrt{pu - e_3},$$
$$\mathrm{R} = \sqrt{pu - e_3}\sqrt{pu - e_1}.$$

Le produit RMN correspondant à la première expression sera

$$\mathrm{RMN} = \sqrt{pu - e_1}\sqrt{pv - e_1}\sqrt{pw - e_1}.\sqrt{pu - e_2}\sqrt{pv - e_2}\sqrt{pw - e_2} = \mathrm{C}xy;$$

$\mathrm{C}xy$ est une fonction qui vérifie bien $\Delta \mathrm{V} = 0$. Le produit RMN d'où dérive $\mathrm{C}xy$ est bien un produit de Lamé, et les facteurs sont des fonctions de Lamé.

Les fonctions de Lamé de la classe I sont moins évidentes. On a ici $2k = n = 2$, c'est-à-dire $k = 1$. Or le polynome R en pu doit satisfaire à la relation (141) qui devient

$$\frac{d^2\mathrm{R}}{du^2} = (6\,pu + h)\mathrm{R}.$$

Posons

$$\mathrm{R} = pu + \alpha, \qquad \text{d'où} \qquad \frac{d^2\mathrm{R}}{du^2} = p''u = 6p^2 - \frac{1}{2}g_2.$$

On doit avoir identiquement

$$6p^2 - \frac{1}{2}g_2 \equiv (6p + h)(p + \alpha).$$

Ce qui donne les relations

$$6\alpha + h = 0, \qquad \alpha h = -\frac{1}{2}g_2.$$

L'équation caractéristique est donc

$$h^2 = 3g_2, \qquad \text{d'où} \qquad \alpha = \pm \frac{\sqrt{3g_2}}{6}.$$

On a ainsi les solutions

$$\mathrm{R} = \mathrm{p}\,u \pm \frac{1}{6}\sqrt{3g_2}, \qquad \mathrm{M} = \mathrm{p}\,v \pm \frac{1}{6}\sqrt{3g_2}, \qquad \mathrm{N} = \mathrm{p}\,w \pm \frac{1}{6}\sqrt{3g_2}$$

et les deux produits de Lamé correspondants.

Considérons par exemple le produit

$$\mathrm{RMN} = \left(\mathrm{p}\,u - \frac{1}{6}\sqrt{3g_2}\right)\left(\mathrm{p}\,v - \frac{1}{6}\sqrt{3g_2}\right)\left(\mathrm{p}\,w - \frac{1}{6}\sqrt{3g_2}\right).$$

En l'exprimant au moyen de x, y, z on doit retrouver un polynome harmonique du second degré.

On peut d'ailleurs trouver ce polynome par un calcul direct. Partons en effet de l'identité fondamentale (120) où nous posons, comme on l'a déjà vu n° 48,

$$\lambda^2 = \alpha + g, \qquad a^2 = e_1 + g, \qquad \rho^2 = \mathrm{p}\,u + g, \qquad \ldots.$$

On obtient

$$\frac{x^2}{\alpha - e_1} + \frac{y^2}{\alpha - e_2} + \frac{z^2}{\alpha - e_3} - 1 = \frac{(\mathrm{p}\,u - \alpha)(\mathrm{p}\,v - \alpha)(\mathrm{p}\,w - \alpha)}{(\alpha - e_1)(\alpha - e_2)(e - e_3)}.$$

Déterminons maintenant α de manière que le premier membre soit un polynome harmonique, c'est-à-dire tel que $\Delta \mathrm{V} = 0$, en désignant par V le premier membre. On aura

$$\frac{1}{\alpha - e_1} + \frac{1}{\alpha - e_2} + \frac{1}{\alpha - e_3} = 0$$

ou

$$3\alpha^2 - 2\alpha(e_1 + e_2 + e_3) + (e_1 e_2 + e_2 e_3 + e_3 e_1) = 0.$$

Mais e_1, e_2, e_3 sont racines de l'équation

$$4s^3 - g_2 s - g_3 = 0;$$

on a donc

$$e_1 + e_2 + e_3 = 0, \qquad e_1 e_2 + e_2 e_3 + e_3 e_1 = -\frac{1}{4} g_2$$

et l'équation en α devient

$$3\alpha^2 = \frac{1}{4} g_2, \qquad \alpha = \mp \frac{1}{6}\sqrt{3g_2}.$$

On retrouve ainsi les mêmes valeurs de α que celles qui sont racines de l'équation caractéristique. En substituant cette valeur de α dans le second membre de l'identité, on a un produit de la forme RMN, la même que ci-dessus, et qui est nécessairement une solution de l'équation de Lamé. Donc chacun des facteurs est également une fonction de Lamé.

3° Pour $n = 3$, on a sept fonctions de Lamé du troisième ordre. On a ici $n = 3 = 2k + 1$ et $k = 1$. On aura donc deux fonctions de Lamé pour chacune des trois formes II et une de la forme IV.

La solution de la forme IV est immédiate :

$$R = \sqrt{pu - e_1}\sqrt{pu - e_2}\sqrt{pu - e_3}, \qquad RMN = Cxyz.$$

Pour avoir les solutions de la classe II, on peut partir de l'identité fondamentale en multipliant les deux membres par

$$x = C\sqrt{pu - e_1}\sqrt{pu - e_2}\sqrt{pu - e_3}.$$

On a

$$\frac{x^3}{\alpha - e_1} + \frac{xy^2}{\alpha - e_2} + \frac{xz^2}{\alpha - e_3} - x$$
$$= \frac{(pu - \alpha)\sqrt{pu - e_1}(pv - \alpha)\sqrt{pv - e_1}(pw - \alpha)\sqrt{pw - e_1}}{D'}.$$

On détermine α de façon que le polynome du premier membre soit harmonique, il vient

$$\frac{1}{2}\Delta\left(\frac{x^3}{\alpha - e_1} + \frac{xy^2}{\alpha - e_2} + \frac{xz^2}{\alpha - e_3}\right) = \frac{3x}{\alpha - e_1} + \frac{x}{\alpha - e_2} + \frac{x}{\alpha - e_3} = 0.$$

Cette équation détermine deux valeurs de α et deux fonctions R. Mais cette méthode qui peut être généralisée est beaucoup plus compliquée que la voie directe précédente.

Moutard a cherché à déterminer tous les cas où les polynomes harmoniques en x, y, z peuvent se décomposer en facteurs quadratiques. Ce sont précisément les cas où ces polynomes correspondent aux produits de Lamé. Il n'y en a pas d'autres. Nous voyons ainsi une grande analogie avec les fonctions sphériques. On peut la pousser plus loin.

53. Analogie des fonctions de Lamé et des fonctions sphériques. — Comme pour les fonctions sphériques, il y a $2n+1$ fonctions de Lamé d'ordre n. On peut montrer que l'analogie se poursuit très loin et que les fonctions sphériques sont des cas limites particuliers des fonctions de Lamé.

Nous avons défini plus haut un point de l'espace par l'intersection des trois surfaces homofocales de paramètres ρ, μ, ν. Soient x, y, z les coordonnées d'un point quelconque de l'ellipsoïde ρ. Faisons le changement de variable suivant :

$$(150)\qquad x = x_1\sqrt{\rho^2-a^2},\qquad y = y_1\sqrt{\rho^2-b^2},\qquad z = z_1\sqrt{\rho^2-c^2}.$$

Le point x_1, y_1, z_1, ainsi défini, satisfait à la relation

$$x_2^2+y_1^2+z_1^2-1=0,$$

c'est-à-dire que si μ et ν varient (en restant dans leurs intervalles de variation), x, y, z décrit l'éllipsoïde et x_1, y_1, z_1 décrit une sphère. Nous avons donc effectué, par ce changement de notation, la transformation homographique qui fait correspondre la sphère à l'ellipsoïde.

En remplaçant x, y, z par leurs valeurs (121) on obtient

$$(151)\qquad \left\{\begin{aligned} x_1^2 &= \frac{(\mu^2-a^2)(\nu^2-a^2)}{(b^2-a^2)(c^2-a^2)},\\ y_1^2 &= \frac{(\mu^2-b^2)(\nu^2-b^2)}{(c^2-b^2)(a^2-b^2)},\\ z_1^2 &= \frac{(\mu^2-c^2)(\nu^2-c^2)}{(a^2-c^2)(b^2-c^2)}.\end{aligned}\right.$$

Ces valeurs vérifient bien la relation $x_1^2+y_1^2+z_1^2=1$. Le point se trouve donc sur la sphère de rayon 1. En prenant sur cette sphère le système de coordonnées polaires en θ et φ, on pourra encore écrire

$$(152)\qquad x_1=\sin\theta\cos\varphi,\qquad y_1=\sin\theta\sin\varphi,\qquad z_1=\cos\theta.$$

Les coordonnées x_1, y_1, z_1 sont donc à la fois des fonctions symétriques de μ et ν et des fonctions de θ et φ.

Considérons alors le produit MN de deux fonctions de Lamé correspondantes, d'ordre n. Ce produit MN sera une fonction de μ, ν, qu'on pourra également exprimer en fonction de θ et de φ. Cette fonction de θ et de φ sera une fonction sphérique.

En effet, considérons le produit RMN de trois fonctions correspondantes de Lamé d'ordre n. Soit $Q_n(x, y, z)$ le polynome harmonique correspondant, ordonné en groupes homogènes

$$Q_n(x, y, z) = P_n(x, y, z) + P_{n-1}(x, y, z) + \ldots + P_0.$$

Remplaçons x, y, z par leurs valeurs en x_1, y_1, z_1; alors RMN peut s'écrire en mettant en évidence l'homogénéité des groupes P

$$\begin{aligned} RMN &= \rho^n P_n\left(\frac{x}{\rho}, \frac{y}{\rho}, \frac{z}{\rho}\right) + \rho^{n-1} P_{n-1}\left(\frac{x}{\rho}, \frac{y}{\rho}, \frac{z}{\rho}\right) + \ldots \\ &= \rho^n P_n\left(\frac{\sqrt{\rho^2 - a^2}}{\rho} \sin\theta \cos\varphi, \right. \\ &\qquad \left. \frac{\sqrt{\rho^2 - b^2}}{\rho} \sin\theta \sin\varphi, \frac{\sqrt{\rho^2 - b^2}}{\rho} \cos\theta\right) + \rho^{n-1} P_{n-1} + \ldots. \end{aligned}$$

Divisons tout par ρ^n, il vient

$$\begin{aligned} \frac{R}{\rho^n} MN = P_n\left(\frac{\sqrt{\rho^2 - a^2}}{\rho} \sin\theta \cos\varphi, \right. \\ \left. \frac{\sqrt{\rho^2 - b^2}}{\rho} \sin\theta \sin\varphi, \frac{\sqrt{\rho^2 - c^2}}{\rho} \cos\theta\right) + \frac{1}{\rho} H. \end{aligned}$$

Si maintenant ρ augmente indéfiniment, $\frac{R}{\rho^n}$ tend vers 1, ainsi que les radicaux. H est un polynome qui reste fini. On a donc

$$MN = P_n(\sin\theta \cos\varphi, \sin\theta \sin\varphi, \cos\theta). \tag{153}$$

Or MN est un polynome harmonique homogène dans lequel on a remplacé x, y, z par les coordonnées d'un point sur la sphère. C'est donc une fonction sphérique

$$MN = Y_n.$$

Mais on a $2n + 1$ fonctions M. En formant les $2n + 1$ produits MN, on obtiendra comme cas particulier les $2n + 1$ fonctions Y_n.

Ces $2n + 1$ fonctions Y_n seront linéairement indépendantes si les $2n + 1$ fonctions M le sont. Elles constitueront donc un système fondamental de fonctions sphériques. Ce système et le système déjà formé au moyen des polynomes de Legendre sont deux systèmes linéairement équivalents, et non distincts.

54. Développement d'une fonction $\Phi(\mu, \nu)$ sur l'ellipsoïde en une somme de produits de Lamé. — Nous venons de voir les relations qui existent entre les fonctions et les produits de Lamé d'une part et les fonctions sphériques d'autre part. Un produit de Lamé tel que MN n'est autre chose qu'une fonction sphérique, avec changement des variables μ, ν en θ, φ.

De même le $Y_n(\theta, \varphi)$ le plus général pourra s'exprimer par une somme des $2n+1$ produits $M_n N_n$. On aura donc

$$(154) \qquad Y_n(\theta, \varphi) = \sum_{i=1}^{i=2n+1} A_i M_n^i N_n^i.$$

Or une fonction quelconque de θ et de φ comme $\Phi(\theta, \varphi)$, c'est-à-dire une fonction de deux angles, peut être développée, sous certaines conditions, en une somme de fonctions Y_n. En effectuant le changement de variables qui fait correspondre les θ, φ aux μ, ν, la fonction $\Phi(\theta, \varphi)$ deviendra une certaine fonction de μ, ν et les Y_n deviendront des sommes de produits MN, car chaque fonction Y_n se trouvera remplacée par une somme dépendant en général de $2n+1$ produits $M_n N_n$. On aura donc

$$(155) \qquad \Phi(\mu, \nu) = \sum_{n=0}^{n=\infty} Y_n = \sum_{n=0}^{n=\infty} \sum_{i=1}^{i=2n+1} A_i^n M_n^i N_n^i,$$

où l'on fait la sommation d'abord par rapport aux i, ce qui reconstitue la fonction Y_n, puis par rapport aux n, ce qui donne la série.

Considérons en particulier l'ellipsoïde défini par une certaine valeur de ρ, donnée par les formules qui lient les x, y, z aux x_1, y_1, z_1. Il suffira d'exprimer les x, y, z en fonction de μ et de ν pour obtenir cette relation. Cela revient à dire qu'à toute valeur de μ et de ν correspond un seul point de l'ellipsoïde ρ donné et réciproquement.

Si maintenant nous considérons une fonction Φ donnée sur l'ellipsoïde, c'est-à-dire n'ayant qu'une valeur en chaque point de cet ellipsoïde, Φ est une fonction de μ et de ν, et d'après ce que nous venons de démontrer, Φ sera développable en une série de produits de Lamé, qui sera aux notations près une fonction sphérique.

Remarque. — Si sur une sphère on prend une fonction Φ de θ et de φ qui est un *polynome* en x, y, z, on peut la développer suivant les fonctions Y_n et l'on a alors un développement limité

$$\Phi = Y_0 + Y_1 + \ldots + Y_n.$$

Faisons le changement des variables de θ, φ en μ, ν. Un polynome en x, y, z devient un polynome par rapport aux quantités

$$\mu, \quad \nu, \quad \sqrt{\mu^2 - a^2}, \quad \sqrt{\mu^2 - b^2}, \quad \sqrt{\mu^2 - c^2}, \quad \sqrt{\nu^2 - a^2}, \quad \sqrt{\nu^2 - b^2}, \quad \sqrt{\nu^2 - c^2}.$$

De plus, ce sera un polynome *symétrique* qui, sous sa forme la plus générale, comprendra également huit sortes de termes, combinaisons des précédents

$$f(\mu^2) f(\nu^2), \quad \sqrt{\mu^2 - a^2}\sqrt{\nu^2 - a^2} f(\mu^2) f(\nu^2), \quad \ldots.$$

Inversement, en repassant aux coordonnées θ et φ, un tel polynome se transformera en un polynome en $\sin\theta\cos\varphi$, $\sin\theta\sin\varphi$, $\cos\theta$. En l'exprimant en produits de Lamé, ce polynome admettra donc un développement fini et l'on aura

$$\Phi = \sum_{n=0}^{n=m} \sum_{i=1}^{i=2n+1} A_i^n M_n^i N_n^i. \tag{156}$$

55. **Cas de dégénérescence.** — Au point de vue géométrique on peut se demander quelle est la nature de ces coordonnées μ et ν à l'aide desquelles nous avons pu exprimer symétriquement les coordonnées d'un point de la sphère. Il est facile de voir qu'elles représentent sur la sphère un système de coniques sphériques homofocales

$$\frac{x_1^2}{\mu^2 - a^2} + \frac{y_1^2}{\mu^2 - b^2} + \frac{z_1^2}{\mu^2 - c^2} = 0,$$

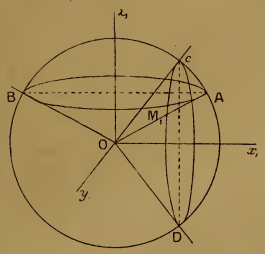
$$\frac{x_1^2}{\nu^2 - a^2} + \frac{y_1^2}{\nu^2 - b^2} + \frac{z_1^2}{\nu^2 - c^2} = 0;$$

comme on a $a^2 > \mu^2 > b^2 > \nu^2 > c^2$, les signes des trois termes du premier cône sont $- + +$ et ceux du second $- - +$. Pour le premier on a des ellipses réelles en le coupant par le plan $x =$ const. et pour le second en le coupant par le plan $z =$ const. Le point M_1 de la sphère a pour coordonnées les paramètres des deux ellipses homofocales qui passent par M_1 (*fig.* 33).

Le cas limite des coordonnées homofocales est constitué sur la sphère par le système des coordonnées polaires. Ce sont précisément ces cas de dégénérescence que nous allons examiner. Ils se produisent quand deux des quantités a, b, c deviennent égales. Tant qu'elles sont inégales, on a de véritables coordonnées homofocales.

Premier cas : $a = b$. — Nous allons procéder par continuité et supposer d'abord a et b très voisins avant de les faire se confondre, et nous étudierons ce qui se passe quand ils tendent l'un vers l'autre. On a $a^2 > \mu^2 > b^2$, on pose $b^2 = a^2 - \varepsilon$ et $\mu^2 = a^2 - \varepsilon\mu'^2$, où μ'

Fig. 33.



varie de 0 à 1 et ε tend vers 0. Voyons successivement ce que deviennent les expressions de x, y, z. On a

$$x = \sqrt{\rho^2 - a^2}\sqrt{\frac{(\mu^2 - a^2)(\nu^2 - a^2)}{(a^2 - b^2)(a^2 - c^2)}}.$$

Ici, $\mu^2 - a^2 = -\varepsilon\mu'^2$ et $a^2 - b^2 = \varepsilon$, il vient

$$x = \sqrt{\rho^2 - a^2}\sqrt{\frac{-\varepsilon\mu'^2(\nu^2 - a^2)}{\varepsilon(a^2 - c^2)}} = \sqrt{\rho^2 - a^2}\,\mu'\sqrt{\frac{a^2 - \nu^2}{a^2 - c^2}}.$$

De même

$$y = \sqrt{\rho^2 - b^2}\sqrt{\frac{(\mu^2 - b^2)(\nu^2 - b^2)}{(b^2 - a^2)(b^2 - c^2)}}.$$

On a $b^2 - a^2 = -\varepsilon$, et $\mu^2 - b^2 = \varepsilon(1 - \mu'^2)$, les autres b tendent vers a, il vient

$$y = \sqrt{\rho^2 - a^2}\sqrt{\frac{\varepsilon(1 - \mu'^2)(\nu^2 - a^2)}{-\varepsilon(a^2 - c^2)}} = \sqrt{\rho^2 - a^2}\sqrt{1 - \mu'^2}\sqrt{\frac{a^2 - \nu^2}{a^2 - c^2}}.$$

On aura de même, avec $\mu^2 - c^2 = a^2 - c^2$,

$$z = \sqrt{\rho^2 - c^2}\sqrt{\frac{(\mu^2 - c^2)(\nu^2 - c^2)}{(c^2 - a^2)(c^2 - b^2)}} = \sqrt{\rho^2 - c^2}\sqrt{\frac{\nu^2 - c^2}{a^2 - c^2}}.$$

Or, posons

$$\mu' = \cos\varphi,$$

d'où

$$\sqrt{1 - \mu'^2} = \sin\varphi,$$

puis

$$\sqrt{\rho^2 - a^2} = r_1$$

et

$$\sqrt{\rho^2 - c^2} = r_2,$$

enfin

$$(157) \qquad \sin\theta = \sqrt{\frac{a^2 - \nu^2}{a^2 - c^2}}, \qquad \cos\theta = \sqrt{1 - \sin^2\theta} = \sqrt{\frac{\nu^2 - c^2}{a^2 - c^2}}.$$

Les expressions ci-dessus x, y, z s'écriront, en coordonnées analogues aux coordonnées polaires, en θ et φ, sous la forme

$$(158) \qquad x = r_1 \sin\varphi \cos\varphi, \qquad y = r_1 \sin\theta \sin\varphi, \qquad z = r_2 \cos\theta.$$

En faisant $a = b$, nous avons obtenu un ellipsoïde allongé de révolution autour de Oz. On aura alors

$$(158') \qquad \frac{y}{z} = \operatorname{tang}\varphi;$$

φ désigne donc l'angle du méridien du point M avec le plan zOx. Quant à θ, c'est une variable analogue à la latitude de la sphère.

Ainsi les produits de Lamé à deux termes, qui sont dans le cas général des fonctions de μ et ν, et aussi des fonctions sphériques, se trouvent ici exprimés directement en fonction de θ et de φ. Autrement dit, $MN = f(\mu)\, f(\nu)$ vérifie l'équation des fonctions sphériques. C'est réellement une certaine fonction Y_n quand b tend vers a. A la limite $f(\mu)$ devient $f_1(\mu')$, en divisant s'il y a lieu par une certaine puissance de ε en facteur; par conséquent f_1 n'est plus la même fonction que f, mais aura une expression analytique différente. Le produit $MN = f_1(\mu')\, f(\nu)$ n'est plus symétrique en μ' et ν.

Cette limite

$$MN = f_1(\mu')\, f(\nu) = F_1(\varphi)\, F(\theta) = Y_n(\theta, \varphi)$$

est donc une fonction sphérique, décomposée en un produit de deux facteurs. Or nous avons trouvé que les fonctions sphériques qui se présentent ainsi sont de la forme

$$(159) \qquad X_n^p \sin p\varphi, \qquad X_n^p \cos p\varphi \qquad (p = 0, 1, 2, \ldots, n),$$

où X_n^p est fonction uniquement de θ et donné par l'expression (105)

$$X_n^p = C(1-t^2)^{\frac{p}{2}} \frac{d^{n+p}(1-t^2)^n}{dt^{n+p}}, \qquad \text{où } t = \cos\theta = \sqrt{\frac{\nu^2-c^2}{a^2-c^2}}.$$

Il s'ensuit donc que M_n tendra vers $\sin p\varphi$ ou vers $\cos p\varphi$ et N vers X_n^p. Nous avons d'ailleurs $2n+1$ produits MN et chacun d'eux tendra vers l'un des $2n+1$ produits $X_n^p \sin p\varphi$ et $X_n^p \cos p\varphi$.

56. Détermination des fonctions de Lamé dans le cas de dégénérescence. — Il faut étudier comment se comportent à la limite les types de nos quatre classes distinguées plus haut.

1° *n pair. Fonctions de la première classe.* — On a alors $M = f(\mu^2)$ et $N = f(\nu^2)$. Nous avons vu qu'à la limite M devient un certain polynome $f_1(\mu'^2)$ en $\mu'^2 = \cos^2\varphi$, c'est-à-dire

$$M = f_1(\mu'^2) = f_1(\cos^2\varphi).$$

D'autre part, nous venons de voir que cette valeur de M est $\cos p\varphi$ ou $\sin p\varphi$. Cette dernière solution ne convient pas, car $\sin p\varphi$ est une fonction impaire. De plus, il faut que p soit pair pour avoir $\cos p\varphi = f_1(\cos^2\varphi)$. Les valeurs limites de M sont donc

$$(160) \quad \cos 0 = 1, \qquad \cos 2\varphi, \qquad \cos 4\varphi, \qquad \ldots, \qquad \cos 2k\varphi = \cos n\varphi.$$

Il y a $k+1$ valeurs si $n = 2k$. Les fonctions N correspondantes sont à la limite

$$(161) \qquad X_n^0, \quad X_n^2, \quad X_n^4, \quad \ldots, \quad X_n^n.$$

Cherchons de même ce que deviennent à la limite les équations

différentielles de Lamé (141)

$$B\frac{d}{d\mu}\left(B\frac{dM}{d\mu}\right) = [n(n+1)\mu^2 + H]M,$$
$$\frac{d^2M}{dv^2} = [n(n+1)pv + h]M.$$

Pour passer de la première forme à la seconde, on a posé (n° 46)

$$\frac{d\mu}{B} = \frac{\mu\, d\mu}{\sqrt{(\mu^2-a^2)(\mu^2-b^2)(\mu^2-c^2)}} = dv.$$

D'autre part, pour étudier le passage à la limite, on a posé

$$\mu^2 = a^2 - \varepsilon\mu'^2, \qquad b^2 = a^2 - \varepsilon, \qquad \mu\, d\mu = -\varepsilon\mu'\, d\mu.$$

Il vient donc à la limite en posant $\mu' = \cos\varphi$

$$dv = \frac{-\varepsilon\mu'\, d\mu'}{\sqrt{(-\varepsilon\mu'^2)\,\varepsilon(1-\mu'^2)(a^2-c^2)}} = \frac{-d\mu'}{\sqrt{(1-\mu'^2)(c^2-a^2)}} = \frac{d\varphi}{\sqrt{c^2-a^2}}.$$

L'équation différentielle devient donc

$$(c^2-a^2)\frac{d^2M}{d\varphi^2} = [n(n+1)a^2 + H]M \qquad \text{ou} \qquad \frac{d^2M}{d\varphi^2} = KM.$$

Puisque la limite de M est $\cos p\varphi$, où p est pair, on a évidemment

$$\frac{d^2M}{d\varphi^2} = -p^2M, \qquad K = -p^2, \qquad \frac{n(n+1)a^2+H}{a^2-c^2} = p^2.$$

Nous savions déjà que, pour que la solution M existe, il fallait que H soit l'une des $k+1$ racines d'une équation E, analogue à l'équation caractéristique donnant h. Nous retrouvons ici ces $k+1$ valeurs données par

$$(162)\qquad \left\{\begin{array}{ll} \dfrac{n(n+1)a^2+H_1}{a^2-c^2} & = 0, \\ \dfrac{n(n+1)a^2+H_2}{a^2-c^2} & = 2^2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots & , \\ \dfrac{n(n+1)a^2+H_{k+1}}{a^2-c^2} & = (2k)^2. \end{array}\right.$$

2° *n pair. Fonctions de la troisième classe.* — Considérons

d'abord les fonctions du premier type III_1. On a

$$M = \sqrt{\mu^2 - b^2}\sqrt{\mu^2 - c^2}\, f(\mu^2) = \sqrt{\varepsilon(1-\mu'^2)(a^2-c^2)}\, f_1(\mu'^2).$$

Si $n = 2k$ est le degré de M, le degré de f sera $k-1$. Or M étant solution d'une équation différentielle linéaire, on peut diviser son expression par la constante $\sqrt{\varepsilon(a^2-c^2)}$, il vient

$$M = \sqrt{1-\mu'^2}\, f_1(\mu'^2) = \sin\varphi\, f_1(\cos^2\varphi).$$

Nous avons vu, d'autre part, que M doit être égal à $\sin p\varphi$ ou à $\cos p\varphi$. Comme ici la fonction M est impaire, ce ne peut être que $\sin p\varphi$ avec p impair.

L'équation caractéristique E_2 correspondant à ce cas aura à la limite k racines réelles définies par les formules

$$(163) \qquad \frac{n(n+1)a^2 + \Pi}{a^2 - c^2} = p^2 \qquad (p = 1, 3, \ldots, 2k-1).$$

Les fonctions du type III_2 et III_3 donneront également chacune k solutions analogues.

En effet, le type III_2 nous donne à la limite

$$M = \sqrt{\mu^2 - c^2}\sqrt{\mu^2 - a^2}\, f(\mu^2) = \mu' f_1(\mu'^2) = \cos\varphi\, f_1(\cos^2\varphi).$$

La solution est $M = \cos p\varphi$ avec p impair.

Les racines limites de l'équation caractéristique sont données par la même formule que précédemment (163) où p est impair. Ce sont les mêmes que celles de $E_2 = 0$ du cas précédent.

Le type III_3 donne de même

$$\begin{aligned} M &= \sqrt{\mu^2 - a^2}\sqrt{\mu^2 - b^2}\, f(\mu^2) \\ &= \mu'\sqrt{1-\mu'^2}\, f_1(\mu'^2) = \sin\varphi\cos\varphi\, f_1(\cos^2\varphi). \end{aligned}$$

La solution est $M = \sin p\varphi$ avec p pair (0 exclu).

Les valeurs limites des solutions de l'équation caractéristique sont donc les mêmes que celles du type I (162), avec p pair, sauf $p = 0$.

En résumé, pour n pair $= 2k$, nous avons trouvé $k+1$ valeurs de M et $k+1$ solutions de l'équation caractéristique avec p pair, pour le type I, et k valeurs de M avec k solutions du type III_1. Les k dernières valeurs séparent les $k+1$ valeurs précédentes.

Pour les fonctions du type III_2 nous obtenons k nouvelles valeurs de M, mais les k solutions correspondantes de l'équation caractéristique sont identiques à celles du type III_1. Le type III_3 donne de même k nouvelles valeurs de M et k solutions faisant partie déjà du type I. Les valeurs du type III_3 séparent celles de III_2.

Nous obtenons en tout $4k+1=2n+1$ valeurs de M, comme il le fallait.

4° Les cas où n est *impair* se traiteraient de la même façon.

Second cas : $b=c$. — On a un ellipsoïde aplati. On pose

$$b^2=c^2+\varepsilon, \qquad \nu^2=c^2+\varepsilon\nu'^2.$$

C'est ν au lieu de μ qui est devenu le paramètre singulier et on le remplace par ν'. On aura par exemple

$$x=\sqrt{\rho^2-a^2}\sqrt{\frac{(\mu^2-a^2)(\nu^2-a^2)}{(a^2-b^2)(a^2-c^2)}}=\sqrt{\rho^2-a^2}\sqrt{\frac{a^2-\mu^2}{a^2-c^2}}=r_1\cos\theta.$$

On prend comme origine des coordonnées polaires l'axe Ox_1 et c'est μ qui correspondra maintenant à ρ. On pose ensuite $\nu'=\sin\varphi$ et l'on arrive aux mêmes conclusions.

57. Les racines des équations caractéristiques sont toutes réelles. — Il est facile de le démontrer au moyen des résultats précédents, en se basant sur la loi de continuité.

a^2, b^2, c^2 étant quelconques, nous pouvons prendre n pair et considérer seulement la classe I dont l'équation caractéristique a $k+1$ solutions et la classe III_1 qui a k solutions. Nous pouvons supposer de plus que le coefficient de la plus haute puissance de H dans l'équation caractéristique est l'unité. Laissons alors a et c fixes et faisons varier b d'une façon continue entre les deux. Les coefficients des équations caractéristiques E_1 et E_3 varient d'une façon continue ainsi que leurs racines. Si deux racines sont réelles, elles ne peuvent devenir imaginaires qu'en devenant d'abord égales.

Si alors nous faisons tendre b vers a, nous savons que, pour $b=a$, les deux équations E_1 et E_2 dégénèrent et nous en connaissons les racines. Elles sont toutes réelles et celles de E_2 s'inter-

calent entre celles de E_1. Écrivons le tableau des racines, on a

$$\begin{array}{lccccccccc} (E_1) & & H_1 & & H_2 & & H_3 & \ldots & H_k & & H_{k+1} \\ (E_2) & & & H'_1 & & H'_2 & & \ldots & & H'_k & \end{array}$$

Faisons varier maintenant b en sens inverse et tendre vers c. Les racines varient d'une façon continue et si par exemple deux racines de E_1, telles que H_1 et H_2 devenaient égales, la racine H'_1 de E_2 qui est restée constamment comprise entre H_1 et H_2 deviendrait égale à leur valeur commune. Nous aurions une racine double de l'une des deux équations qui serait racine commune aux deux équations. Or on démontre qu'il est impossible qu'il en soit ainsi.

En effet, considérons les équations différentielles qui définissent M pour les deux classes

$$\frac{d^2 M}{dv^2} = [n(n+1)pv + H_1]M, \qquad \frac{d^2 M'}{dv^2} = [n(n+1)pv + H'_1]M',$$

H_1 et H'_1 étant les racines des équations E_1 et E_2. Nous supposons que ces racines deviennent égales, $H_1 = H'_1$, et nous multiplions les équations par M' et $-M$, pour les ajouter; nous avons

$$M'\frac{d^2 M}{dv^2} - M\frac{d^2 M'}{dv^2} = 0,$$

d'où

$$M'\frac{dM}{dv} - M\frac{dM'}{dv} = \text{const.}$$

Or les fonctions M et M' sont de la forme

$$M = f(pv), \qquad M' = \sqrt{pv - e_2}\sqrt{pv - e_3}\, f_1(pv) = p_2 v\, p_3 v\, f_1(pv).$$

Si l'on ajoute une période 2ω ou $2\omega'$, M ne change pas, sa dérivée non plus. Au contraire, M' et sa dérivée changent de signe pour l'une des périodes, comme on l'a vu. On a donc nécessairement

$$M'\frac{dM}{dv} - M\frac{dM'}{dv} = 0, \qquad \text{d'où} \qquad \frac{M'}{M} = \text{const.}$$

Cette relation est impossible, car alors M' et le produit $p_2 v\, p_3 v$ seraient exprimables rationnellement en fonction de pv et admettraient les périodes 2ω et $2\omega'$, ce qui n'est pas, d'après ce qu'on a vu au n° 47.

On ne peut donc pas avoir $H_1 = H'_1$. Les équations E_1 et E_2 ne

peuvent pas avoir de racines communes. Les racines de l'une et l'autre équation restent donc toujours distinctes et toujours réelles.

Remarque. — On pourrait faire cette démonstration sans recourir aux propriétés des fonctions elliptiques. En effet, en revenant de v à μ, on aurait

$$dv = \frac{d\mu}{B}, \qquad B\left(M'\frac{dM}{d\mu} - M\frac{dM'}{d\mu}\right) = \text{const.}$$

avec

$$M = f(\mu^2) \qquad \text{et} \qquad M' = \sqrt{\mu^2 - b^2}\sqrt{\mu^2 - c^2}\, f_1(\mu^2).$$

Si l'on substitue ces valeurs de M et M′ dans l'équation différentielle, les irrationnelles ne disparaissent pas, B étant en facteur. Il faut alors que la constante soit nulle, ce qui entraîne en intégrant

$$M = CM', \qquad f(\mu^2) = C\sqrt{\mu^2 - b^2}\sqrt{\mu^2 - c^2}\, f_1(\mu^2).$$

Ce qui est impossible, le premier membre étant rationnel, le second non.

58. Formule fondamentale. — Posons

$$(164) \qquad l = \frac{1}{(\rho^2 - \mu^2)(\rho^2 - \nu^2)}, \qquad l_0 = \frac{1}{(\rho_0^2 - \mu^2)(\rho_0^2 - \nu^2)},$$

l_0 étant la valeur que prend l sur l'ellipsoïde E_0 défini par une certaine valeur constante $\rho = \rho_0$, on aura la formule suivante :

$$(165) \qquad \iint l_0 MN M_1 N_1 \, d\sigma = 0,$$

où l'intégration est étendue à tous les éléments $d\sigma$ de la surface de l'ellipsoïde et où les produits MN et M_1N_1 sont différents, soit par l'ordre des fonctions M, soit comme solutions différentes de la même équation d'ordre n.

En effet, posons

$$V = RMN, \qquad V_1 = R_1 MN.$$

Ces fonctions possèdent les propriétés du potentiel, on peut leur appliquer la formule de Green qui devient

$$\iiint_T (V\Delta V_1 - V_1\Delta V)\, d\tau = \iint_{E_0}\left(V\frac{dV_1}{dn} - V_1\frac{dV}{dn}\right) d\sigma.$$

Mais V et et V_1 étant des produits de Lamé, on a $\Delta V = 0$ et $\Delta V_1 = 0$. Le premier membre est donc nul. Il en est de même de l'intégrale du second membre étendue à la surface de l'ellipsoïde. Elle va nous donner la formule cherchée.

En effet, les surfaces ρ, μ, ν étant orthogonales, si ρ varie seul, le point figuratif reste sur l'intersection des surfaces $\mu =$ const. et $\nu =$ const., et décrit une trajectoire orthogonale aux ellipsoïdes. On a donc

$$(166) \qquad ds^2 = \alpha^2\, d\rho^2 + \beta^2\, d\mu^2 + \gamma^2\, d\nu^2, \qquad ds = dn = \alpha\, d\rho.$$

Si l'on suppose ρ croissant, $d\rho$ est positif, cette relation donne la direction de la normale extérieure à l'ellipsoïde E_0. On a donc, d'après cette formule et la formule (125),

$$(A) \qquad \frac{dV}{dn} = \frac{dV}{\alpha\, d\rho} = \frac{1}{\alpha}\frac{dV}{du}\frac{du}{d\rho} = \frac{1}{\alpha}\frac{V'}{X} = \frac{V'}{\sqrt{(\rho^2-\mu^2)(\rho^2-\nu^2)}}.$$

Mais V', étant la dérivée par rapport à u, sera la dérivée de RMN par rapport à u, c'est-à-dire $V' = R'MN$, car R seul dépend de u par l'intermédiaire de ρ. En tenant compte de la valeur de l, on aura finalement

$$\frac{dV}{dn} = \frac{R'MN}{\sqrt{(\rho^2-\mu^2)(\rho^2-\nu^2)}} = l R'MN.$$

V_1 donne une expression analogue et l'intégrale double ci-dessus devient

$$\int\int_{E_0} l(RMN.R'_1 M_1 N_1 - R_1 M_1 N_1 . R'MN)\, d\sigma = 0.$$

Or l'intégrale étant étendue à la surface de l'ellipsoïde, on a $\rho = \rho_0$. Les fonctions R, R', R_1, R'_1 sont des constantes que l'on peut faire sortir du signe d'intégration. De plus, $l = l_0$ et il vient

$$(RR'_1 - R_1 R')\int\int_{E_0} l_0 MNM_1N_1\, d\sigma = 0.$$

Si R_1 est différent de R, le premier facteur n'est pas nul. On a donc

$$(165) \qquad \int\int_{E_0} l_0 MNM_1N_1\, d\sigma = 0.$$

dans le cas où MN et M_1N_1 sont différents.

Remarque. — Il résulte du calcul que nous venons de faire que l'on a, d'après la formule (A),

$$\frac{du}{dn} = -l. \tag{167}$$

Cette variable l représente donc la *dérivée de la variable elliptique* prise suivant la normale extérieure. On peut établir cette formule directement. En effet, on a obtenu déjà

$$\frac{du}{d\rho} = \pm \frac{\rho}{\sqrt{(\rho^2 - a^2)(\rho^2 - b^2)(\rho^2 - c^2)}} = \pm \frac{1}{\Lambda}.$$

Reportons-nous au rectangle de variation de u, v, w; on a vu que pour $u = 0$, on a ρ infini et ρ décroît quand u croît, donc $\frac{du}{d\rho}$ est bien négatif, il faut le signe —. On aura ensuite

$$\frac{du}{dn} = \frac{du}{d\rho}\frac{d\rho}{dn} = -\frac{1}{\alpha\Lambda} = -l.$$

On voit donc la raison de l'introduction de l dans les calculs : c'est la dérivée normale de u.

59. **Calcul des coefficients du développement en série de produits MN.** — Considérons un point sur l'ellipsoïde $\rho = \rho_0$. Il lui correspond des valeurs bien déterminées de u et de v, ou de μ et de ν. Considérons de même une fonction donnée de la position du point sur l'ellipsoïde E_0. Ce sera une fonction de u, v ou de μ, ν. Nous avons vu qu'une telle fonction est développable, en une série de produits de Lamé, sous certaines conditions

$$\Phi(\mu, \nu) = \sum_0^\infty A_k M_k N_k. \tag{168}$$

Il s'agit de déterminer les coefficients A_k de ce développement. Pour cela, multiplions les deux membres par $l_0 M_k N_k d\sigma$ et intégrons sur toute la surface de E_0. D'après la formule précédente, tous les termes du second membre sont nuls, sauf le terme k, et l'on a

$$\int\int_{E_0} \Phi(\mu, \nu) l_0 M_k N_k \, d\sigma = A_k \int\int_{E_0} l_0 M_k^2 N_k^2 \, d\sigma. \tag{169}$$

Ces deux intégrales ne dépendent pas de ρ. Il suffit de faire voir pour cela que $d\sigma$ n'en dépend pas, ce qui est déjà certain à première vue puisque $d\sigma$ est l'élément de surface sur l'ellipsoïde $\rho = \rho_0$. Désignons par ds_1 l'élément différentiel de l'arc de courbe correspondant à la variation $d\mu$ de μ seulement et par ds_2 l'élément correspondant à $d\nu$. Ces éléments sont orthogonaux et l'on a

$$ds_1 = \beta\, d\mu, \qquad ds_2 = \gamma\, d\nu, \qquad d\sigma = ds_1\, ds_2 = \beta\gamma\, d\mu\, d\nu,$$

$$d\sigma = \sqrt{\frac{(\mu^2-\nu^2)(\mu^2-\rho^2)}{B^2}}\sqrt{\frac{(\nu^2-\rho^2)(\nu^2-\mu^2)}{C^2}}\, d\mu\, d\nu$$
$$= \frac{\mu^2-\nu^2}{l_0\sqrt{-B^2C^2}}\, d\mu\, d\nu.$$

$\sqrt{-B^2C^2}$ est réel, car B^2 et C^2 sont de signes contraires. En substituant $l_0\, d\sigma$ dans l'intégrale ci-dessus, on obtient l'expression suivante en μ et ν seulement, qui permet de calculer A_k et les coefficients analogues

$$(169') \qquad \int\int_{E_0} \Phi(\mu, \nu) M_k N_k \frac{\mu^2-\nu^2}{\sqrt{-B^2C^2}}\, d\mu\, d\nu$$
$$= A_k \int\int_{E_0} M_k^2 N_k^2 \frac{\mu^2-\nu^2}{\sqrt{-B^2C^2}}\, d\mu\, d\nu.$$

Les conditions de convergence sont les mêmes que celles des développements en fonctions sphériques.

60. **Cas particulier du polynome symétrique.** — Nous avons un cas intéressant et important, quand le polynome Φ est symétrique en μ et en ν et par rapport aux six radicaux en μ et ν, $\sqrt{\mu^2-a^2}$, etc. Ce polynome étant supposé de degré n, le développement sera limité à n produits de Lamé, le dernier étant de degré n :

$$\Phi(\mu, \nu) = \sum_0^n A_k M_k N_k.$$

En appliquant la méthode générale précédente, on trouvera donc des coefficients nuls dès que M_k dépassera l'ordre n, c'est-à-dire

$$(170) \qquad \int\int_{E_0} \Phi(\mu, \nu) l_0 M_k N_k\, d\sigma = 0 \qquad (k > n).$$

Ce résultat aura lieu dès que le degré k du produit $M_k N_k$ dépassera le degré n de $\Phi(\mu, \nu)$. C'est là un résultat analogue à celui que nous avons vu pour les polynomes de Legendre, pour lesquels on a, dès que le degré de X dépasse celui de P,

$$\int_{-1}^{+1} P(x) X_n(x)\, dx = 0.$$

Ce résultat va d'ailleurs nous permettre de démontrer le théorème suivant, très important, sur les fonctions de Lamé.

61. **Théorème sur les racines du polynome $f(\rho^2)$ qui figure dans les huit classes des polynomes de Lamé.** — *Ce polynome en ρ^2 a toutes ses racines réelles, distinctes et comprises entre a^2 et c^2.* Nous allons, pour chaque point, démontrer que si l'on fait la supposition contraire, on arrive à une absurdité.

1° *Racines réelles.* — Supposons qu'il y ait des racines imaginaires. Décomposons le polynome en facteurs du premier degré en ρ^2, puis en un produit de deux polynomes, l'un $\varphi(\rho^2)$ comprenant toutes les racines réelles, l'autre $\psi(\rho^2)$, les racines imaginaires :

$$f(\rho^2) = (\rho^2 - \alpha_1)(\rho^2 - \alpha_2)\ldots, \qquad (\rho^2 - \alpha_i)\ldots(\rho^2 - \alpha_n) = \varphi(\rho^2)\psi(\rho^2),$$

$\psi(\rho^2)$ conserve un signe constant, $\varphi(\rho^2)$ seul peut changer de signe quand on parcourt son domaine de variation.

Considérons la première classe des fonctions de Lamé, on a

$$M_k = f(\mu^2) = \varphi(\mu^2)\psi(\mu^2), \qquad N_k = f(\nu^2) = \varphi(\nu^2)\psi(\nu^2).$$

Faisons maintenant $\Phi(\mu, \nu) = \varphi(\mu^2)\varphi(\nu^2)$, nous avons

$$\int\int_{E_0} \Phi(\mu, \nu) l_0 M_k N_k\, d\sigma = \int\int_{E_0} [\varphi(\mu^2)\varphi(\nu^2)]^2 \psi(\mu^2)\psi(\nu^2)\, d\sigma.$$

Mais, d'après la formule précédente (170), l'intégrale est nulle puisque le degré de φ et par conséquent de Φ est inférieur à celui de M_k. Or ceci est impossible puisque tous les éléments de la seconde intégrale sont positifs, à moins de supposer que le degré de ψ soit *nul*, c'est-à-dire qu'il n'y a pas de racines imaginaires.

Pour les classes II, III, IV, il n'y a plus à considérer des radi-

caux. Par exemple, pour la classe II, nous avons

$$M_k = \sqrt{\mu^2 - a^2}\,\varphi(\mu^2)\,\psi(\mu^2), \qquad N_k = \sqrt{\nu^2 - a^2}\,\varphi(\nu^2)\,\psi(\nu^2);$$

nous posons alors pour la fonction Φ

$$\Phi(\mu, \nu) = \sqrt{\mu^2 - a^2}\,\sqrt{\nu^2 - a^2}\,\varphi(\mu^2)\,\varphi(\nu^2).$$

La fonction considérée plus haut devient

$$\int\int_{E_0} \Phi(\mu, \nu)\, l_0 M_k N_k\, d\sigma$$
$$= \int\int_{E_0} (\mu^2 - a^2)(\nu^2 - a^2)\,[\varphi(\mu^2)\,\varphi(\nu^2)]^2\,\psi(\mu^2)\,\psi(\nu^2)\, d\mu\, d\nu.$$

Ces intégrales doivent être nulles; or les éléments de la seconde conservent encore un signe constant, car on a $a^2 > \mu^2 > \nu^2$. Il faut donc encore que le degré de ψ soit *nul*.

2° *Racines distinctes.* — Il n'y a pas de racines multiples. Supposons qu'il y ait des racines multiples et soient p_1, p_2, ... les ordres de multiplicité. Si p_1 est pair, on aura un terme de la forme $(\rho^2 - \alpha_1)^{2n_1}$; si p_2 est impair, on écrira le terme correspondant $(\rho^2 - \alpha_2)^{2n_2+1} = (\rho^2 - \alpha_2)^{2n_2}(\rho^2 - \alpha_2)$. Finalement, on réunira en un polynome φ toutes les racines distinctes, en un polynome ψ toutes les racines paires; le signe ψ ne changera pas : on aura

$$f(\rho^2) = (\rho^2 - \alpha_1)(\rho^2 - \alpha_2)\ldots, \qquad (\rho^2 - \alpha_1)^{2n_1}(\rho^2 - \alpha_2)^{2n_2}\ldots = \varphi(\rho^2)\,\psi(\rho^2).$$

On a ainsi la même décomposition et l'on arrive à la même conclusion que dans le cas précédent. Il faut que le degré de ψ soit *nul*, c'est-à-dire ici qu'il n'y ait pas de racines multiples.

3° *Racines comprises entre a^2 et c^2.* — Décomposons encore notre polynome $f(\rho^2)$ en un polynome φ contenant toutes les racines comprises entre a^2 et c^2 et un polynome ψ contenant toutes les racines extérieures à l'intervalle a^2, c^2. Puisque μ^2 et ν^2 restent compris entre a^2 et c^2, ce dernier polynome conserve un signe constant. On verrait de la même façon qu'il doit être de degré nul. Il n'y a pas de racines extérieures à a^2, c^2.

C'est là une généralisation des propriétés du polynome de

Legendre qui a toutes ses racines réelles, distinctes et comprises entre -1 et $+1$.

On pourra consulter au sujet des racines des fonctions de Lamé un travail de Stieljés, dans lequel l'auteur démontre les théorèmes par des considérations mécaniques.

62. **Fonctions de Lamé de deuxième espèce.** — Lamé a introduit une nouvelle fonction pour résoudre le problème du potentiel. Considérons l'équation différentielle qui définit R :

$$\frac{d^2 R}{du^2} = [n(n+1)pu + h]R,$$

h étant une valeur numérique, solution de l'équation caractéristique attachée à cette équation. Comme on l'a vu, la fonction de Lamé R n'est qu'une intégrale particulière de cette équation. Comme l'intégrale générale doit comporter deux constantes arbitraires, il existe une autre solution particulière, qu'Hermite a étudiée en détail (*Comptes rendus*, t. 85, 86, 89, et *Œuvres complètes*, t. III, p. 118 et 265). On désigne par S cette seconde solution et c'est elle qu'on appelle *fonction de Lamé de seconde espèce*. Elle vérifie donc l'équation différentielle des fonctions de Lamé et l'on a

$$\frac{d^2 S}{du^2} = [n(n+1)pu + h]S.$$

Multiplions cette équation par $+R$, la première par $-S$ et ajoutons, on a

$$R\frac{d^2 S}{du^2} - S\frac{d^2 R}{du^2} = 0, \qquad \text{d'où} \qquad R\frac{dS}{du} - S\frac{dR}{du} = \text{const.}$$

On peut particulariser la constante, car si S est une solution, KS le sera aussi. On prend alors $2n+1$ pour valeur de cette constante, n étant le degré de R. On appellera, d'une façon plus précise, *fonction de Lamé de seconde espèce*, celle qui satisfait à la condition

$$(171) \qquad R\frac{dS}{du} - S\frac{dR}{du} = 2n+1.$$

Divisons par R^2 et intégrons, on a

$$(171') \qquad \frac{d}{du}\left(\frac{S}{R}\right) = \frac{2n+1}{R^2}, \qquad S = R\int_0^u \frac{2n+1}{R^2}\,du.$$

En intégrant de 0 à u, la constante additive est parfaitement déterminée. L'intégrale générale de l'équation de Lamé sera finalement $C_1 R + C_2 S$.

63. **Propriétés de la fonction** S. — 1° Les produits tels que RMN vérifient l'équation de Laplace. Nous avons vu que cela tient à ce que R est solution de l'équation différentielle de Lamé. Comme S jouit de la même propriété, le produit SMN vérifie aussi l'équation $\Delta V = 0$.

2° Cherchons comment se comporte S dans le voisinage de $u = 0$ ou de $\rho = \infty$. Pour cela, écrivons l'expression de S en fonction de ρ, on a

$$S = R \int_{\infty}^{\rho} \frac{2n+1}{R^2} \frac{\rho\, d\rho}{-\sqrt{(\rho^2 - a^2)(\rho^2 - b^2)(\rho^2 - c^2)}}.$$

Quand ρ varie de ∞ à a, $d\rho$ est négatif, par conséquent S est positif pour toutes les valeurs de ρ. Cherchons sa valeur principale. Or, on a en ne conservant que les valeurs principales des termes avant et sous le signe d'intégration, R étant de degré n,

$$(172) \qquad S = \rho^n \int_{\infty}^{\rho} -\frac{2n+1}{\rho^{2n+2}}\, d\rho \ldots = \rho^n \frac{1}{\rho^{2n+1}} \cdots = \frac{1}{\rho^{n+1}} \cdots$$

Ainsi, le développement de R commence par ρ^n et celui de S par $\frac{1}{\rho^{n+1}}$. Tout produit RS commence donc par un terme de degré -1 en ρ.

On pouvait le démontrer directement, car en essayant de vérifier l'équation différentielle qui définit R et S par un développement de la forme $\rho^\alpha \left(a_0 + \frac{a_1}{\rho} + \ldots\right)$, on trouve, en identifiant les termes du degré le plus élevé,

$$\alpha(\alpha + 1) = n(n + 1).$$

Cette équation a deux solutions, $\alpha = n$ qui correspond à R et $\alpha = -(n+1)$ qui correspond à S.

CHAPITRE VII.

FIGURES D'ÉQUILIBRE VOISINES DES ELLIPSOÏDES.

64. **Problème de Dirichlet sur l'ellipsoïde.** — Soit E_0 un ellipsoïde qui correspond à la valeur ρ_0 du paramètre ρ, et soit donnée sur la surface de cet ellipsoïde une fonction harmonique V_0, c'est-à-dire une fonction de μ et de ν donnée pour chaque point M de l'ellipsoïde, c'est-à-dire une fonction de la position de M. Nous pouvons la développer en une série de produits MN (168),

$$V_0 = \sum_0^\infty A_k M_k N_k = \sum_0^\infty \alpha_k R_k^0 S_k^0 M_k N_k, \tag{173}$$

en posant

$$A_k = \alpha_k R_k^0 S_k^0,$$

S_k et R_k étant les fonctions correspondantes à M_k, N_k et R_k^0, S_k^0 leurs valeurs pour $\rho = \rho_0$ sur l'ellipsoïde E_0. Ces fonctions sont connues ainsi que leurs valeurs S_k^0 et R_k^0 sur l'ellipsoïde. La dernière relation détermine donc les α_k si les A_k sont donnés.

Problème intérieur. — Il s'agit de déterminer une fonction harmonique V_i à l'intérieur de l'ellipsoïde qui prenne sur l'ellipsoïde la valeur V_0. Il suffit de prendre

$$V_i = \sum_0^\infty \alpha_k S_k^0 R_k M_k N_k. \tag{174}$$

Cette série est convergente du moment que la série V_0 est convergente, car on a toujours $R_k < R_k^0$, puisque à l'intérieur on a $\rho < \rho_0$. Elle se réduit à V_0 sur l'ellipsoïde et vérifie bien l'équation du

potentiel, puisque chaque terme est harmonique. C'est bien l'expression du potentiel.

Problème extérieur. — Il suffit de prendre la série suivante comme valeur du potentiel à l'extérieur :

$$V_e = \sum_0^\infty \alpha_k R_k^0 S_k M_k N_k. \tag{175}$$

Elle est convergente comme V_0, car on a $S_k < S_k^0$, puisque $\rho > \rho_0$ à l'extérieur. De plus, chaque terme est harmonique, et elle se réduit à V_0 sur l'ellipsoïde.

Ces deux fonctions V_i et V_e se raccordent bien sur la surface de l'ellipsoïde ou, en d'autres termes, la fonction générale V est continue quand on traverse la surface de l'ellipsoïde.

Telle est la solution donnée par Lamé.

65. **Potentiel d'une couche infiniment mince.** — On peut toujours considérer ce potentiel V_0 comme dû à une couche homogène infiniment mince d'épaisseur variable répandue sur l'ellipsoïde. Cette épaisseur ζ peut être considérée comme positive ou négative. Nous supposons la densité égale à l'unité. La masse du cylindre élémentaire ayant pour base $d\sigma$ sur E_0 est donc $\zeta\, d\sigma$. On peut dire ainsi que la densité superficielle est égale à ζ.

Cherchons à déterminer la valeur qu'il faut donner à ζ pour que le potentiel de cette couche soit égal à V_0 sur l'ellipsoïde, à V_i et à V_e à l'intérieur et à l'extérieur.

ζ étant considéré comme la densité superficielle, nous avons vu, n° 12, que l'on a

$$\frac{dV_e}{dn_e} + \frac{dV_i}{dn_i} = -4\pi\zeta.$$

Calculons d'abord la valeur de la dérivée suivant la normale extérieure. On a, en remarquant que ρ seul ou u, et par conséquent S seul varie,

$$\frac{dV_e}{dn_e} = \frac{dV_e}{du}\frac{du}{dn} = \sum \alpha_k R_k^0 \frac{dS_k}{du} M_k N_k \frac{du}{dn_e} = -\sum \alpha_k l_0 R_k^0 S_k' N_k N_k.$$

On aura de même pour la normale intérieure, en remarquant

que le signe de l_0 est changé et que R seul varie,

$$\frac{dV_i}{dn_i} = \sum \alpha_k S_k^0 \frac{dR_k}{du} M_k N_k \frac{du}{dn_i} = \sum \alpha_k l_0 S_k^0 R_k' M_k N_k.$$

Une fois les dérivées prises par rapport à ρ, il faut faire $\rho = \rho_0$. On a finalement

$$-4\pi\zeta = \sum \alpha_k l_0 M_k N_k (S_k R_k' - S_k' R_k)_0.$$

D'après la relation (171) entre les fonctions de Lamé R et S, on obtient alors pour la valeur de ζ

$$(176) \qquad \zeta = \sum_0^\infty \frac{2n+1}{4\pi} \alpha_k l_0 M_k N_k = l_0 \sum_0^\infty \frac{2n+1}{4\pi} \alpha_k M_k N_k.$$

Ce n'est plus une série procédant suivant les produits de Lamé, puisqu'on a en facteur l_0, qui est une fonction de μ, et de ν.

On a donc obtenu les formules qui sont fondamentales pour la suite :

$$(177) \quad V_0 = \sum \alpha_k R_k^0 S_k^0 M_k N_k, \qquad \zeta = l_0 \sum \beta_k M_k N_k, \qquad \beta_k = \frac{2n+1}{4\pi} \alpha_k.$$

Inversement, une couche d'épaisseur infiniment mince étant donnée, on peut, à l'aide des formules précédentes, écrire son potentiel. Pour cela, ζ étant supposé donné en chaque point de E_0 comme fonction de μ et ν, il suffit de développer en une série de produits MN le rapport $\frac{\zeta}{l_0}$ d'après la formule ci-dessus, ce qui donne les β_k. On en déduit les α_k et, par conséquent, V_0.

66. **Application. Potentiel de la couche homothétique.** — Considérons une couche réduite à un seul terme du développement, avec ε infiniment petit; on a

$$(177') \qquad \zeta = \varepsilon l_0 M_k N_k, \qquad V_0 = \frac{4\pi}{2n+1} \varepsilon R_k^0 S_k^0 M_k N_k.$$

Prenons le cas le plus simple de tous, celui où la fonction de Lamé qui entre dans cette expression de ζ est de degré 0. Alors $R_0 = M_0 = N_0 = 1$ et la formule générale donne

$$S = R \int_0^n \frac{2n+1}{R^2} du = \int_0^u du = u.$$

Ainsi donc une couche ellipsoïdale d'épaisseur $\zeta = \varepsilon l_0 M_0 N_0 = \varepsilon l_0$ produit un potentiel qui, en chaque point de l'ellipsoïde, a pour valeur

$$V_0 = 4\pi\varepsilon u_0.$$

Appliquons les formules générales pour le potentiel intérieur et extérieur, on a $R_k = R_k^0 = 1$ et $S_k^0 = u_0$ à l'intérieur et $S_k = u$ à l'extérieur, d'où

$$(178). \qquad V_i = 4\pi\varepsilon u_0, \qquad V_e = 4\pi\varepsilon u.$$

Le potentiel est donc constant à l'intérieur et le même qu'à la surface. L'attraction est donc nulle à l'intérieur. Elle s'annule quand on traverse la couche.

A l'extérieur, les surfaces équipotentielles seront les surfaces $u = \text{const.}$, c'est-à-dire $\rho = \text{const.}$ Ce sont des ellipsoïdes homofocaux.

Ce résultat que nous trouvons ainsi par l'application des fonctions de Lamé, est d'ailleurs bien connu. On sait, en effet, que l'action de la couche comprise entre deux ellipsoïdes homothétiques et concentriques est nulle sur un point intérieur. Nous allons montrer que c'est bien la couche définie par $\zeta = \varepsilon l_0$.

Considérons les surfaces équipotentielles $f(x, y, z) = C$. L'élément de normale compris entre les deux surfaces voisines C et $C + dC$ étant dn, on aura pour expression de la force au point M :

$$\frac{dC}{dn} = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}.$$

Soit maintenant l'ellipsoïde

$$\frac{x^2}{\rho_0^2 - a^2} + \frac{y^2}{\rho_0^2 - b^2} + \frac{z^2}{\rho_0^2 - c^2} - 1 = C.$$

En faisant varier C, on a des ellipsoïdes homothétiques et concentriques. Considérons ces surfaces comme des surfaces équipotentielles, l'expression de la force sera

$$\frac{dC}{dn} = 2\sqrt{\frac{x^2}{(\rho_0^2 - a^2)^2} + \frac{y^2}{(\rho_0^2 - b^2)^2} + \frac{z^2}{(\rho_0^2 - c^2)^2}}.$$

Or, la quantité sous le radical a déjà été calculée (124); si, de

plus, on tient compte de la valeur de α (125), on a

$$(179)\qquad \frac{dC}{dn} = 2\frac{\alpha}{\rho} = \frac{2}{A_0 l_0 \rho_0} = \frac{K}{l_0} \qquad \left(K = \frac{2}{A_0 \rho_0} = \text{const.}\right).$$

Or, A_0 (125) et ρ_0 sont constants sur l'ellipsoïde, l_0 est fonction de μ et ν (164). Dans le cas actuel, dC est également constant et infiniment petit; on a donc bien pour l'épaisseur de la couche comprise entre deux ellipsoïdes homothétiques et concentriques :

$$(179')\qquad dn = \zeta = \varepsilon l_0, \qquad \text{où } \varepsilon = A_0 \rho_0\, dC.$$

La formule $V_e = 4\pi\varepsilon u$ obtenue dans ce cas donne une signification mécanique de la variable elliptique u.

67. Notation des fonctions usuelles de Lamé. — Nous nous servirons des fonctions des ordres 0, 1, 2.

Dans l'ordre 0, nous avons une seule fonction de chaque variable :

$$R_0 = 1, \qquad M_0 = 1, \qquad N_0 = 1.$$

Dans l'ordre 1, nous avons trois fonctions, $2n + 1 = 3$:

$$(180)\qquad R_1 = \sqrt{\rho^2 - a^2}, \qquad R_2 = \sqrt{\rho^2 - b^2}, \qquad R_3 = \sqrt{\rho^2 - c^2},$$

et les formules analogues pour M_1, N_1, etc.

Pour passer des coordonnées elliptiques aux coordonnées cartésiennes, on se servira des formules

$$(181)\qquad x = h_1 R_1 M_1 N_1, \qquad y = h_2 R_2 M_2 N_2, \qquad z = h_3 R_3 M_3 N_3,$$

où

$$h_1^2 = \frac{1}{(a^2 - b^2)(a^2 - c^2)}, \qquad h_2^2 = \frac{1}{(b^2 - a^2)(b^2 - c^2)},$$
$$h_3^2 = \frac{1}{(c^2 - a^2)(c^2 - b^2)}.$$

Dans l'ordre 2, on a $2n + 1 = 5$ fonctions. D'abord

$$R_4 = \sqrt{(\rho^2 - b^2)(\rho^2 - c^2)}, \qquad R_5 = \sqrt{(\rho^2 - a^2)(\rho^2 - c^2)},$$
$$R_6 = \sqrt{(\rho^2 - a^2)(\rho^2 - b^2)}.$$

Puis

$$(182)\qquad R_7 = \rho^2 - \alpha, \qquad R_8 = \rho^2 - \alpha',$$

où α et α' sont deux constantes que nous avons calculées. Les cinq fonctions analogues en M et N s'obtiennent en remplaçant ρ par μ et ν.

Entre les fonctions des deux dernières classes, on a les relations évidentes

$$R_4 = R_2 R_3, \qquad R_5 = R_3 R_1, \qquad R_6 = R_1 R_2.$$

On en déduit pour les produits deux à deux de x, y, z les expressions

$$yz = h_2 h_3 R_4 M_4 N_4, \qquad zx = h_3 h_1 R_5 M_5 N_5, \qquad xy = h_1 h_2 R_6 M_6 N_6,$$

Le volume de l'ellipsoïde sera donné par l'expression (R_1, R_2, R_3 représentant les axes)

$$(183) \qquad T = \frac{4}{3}\pi R_1 R_2 R_3 = \frac{4}{3}\pi R_1 R_4 = \frac{4}{3}\pi R_2 R_5 = \frac{4}{3}\pi R_3 R_6.$$

Les cosinus directeurs de la normale à l'ellipsoïde s'expriment aussi facilement au moyen de ces fonctions. Soit n la normale extérieure; cherchons $\cos(n, x)$. Nous avons vu (n° 58) que la normale à l'ellipsoïde s'obtient en considérant μ et ν comme constants et ρ seul variable, et en faisant ensuite $\rho = \rho_0$. On a donc

$$\cos(n, x) = \frac{dx}{ds} = \frac{dx}{dn} = \frac{dx}{\alpha\, d\rho}.$$

D'autre part, dans l'expression de x, en mettant la variable ρ en évidence, on a

$$x = h_1 \sqrt{\rho^2 - a^2}\, M_1 N_1, \qquad dx = \frac{h_1 \rho}{\sqrt{\rho^2 - a^2}} M_1 N_1\, d\rho.$$

Or, on a encore

$$\frac{\rho}{\alpha\sqrt{\rho^2 - a^2}} = \frac{\Lambda\, l\rho}{\sqrt{\rho^2 - a^2}} = l\sqrt{\rho^2 - b^2}\sqrt{\rho^2 - c^2} = l R_4.$$

Nous arrivons ainsi aux formules

$$(184) \qquad \left\{ \begin{aligned} \cos(n, x) &= h_1 l M_1 N_1 R_4, \\ \cos(n, y) &= h_2 l M_2 N_2 R_5, \\ \cos(n, z) &= h_3 l M_3 N_3 H_6. \end{aligned} \right.$$

68. **Méthode de Poincaré.** — Poincaré se propose de trouver des figures d'équilibre infiniment voisines des figures d'équilibre ellipsoïdales déjà connues.

Soit un ellipsoïde matériel E, homogène, et V son potentiel. Donnons à la surface de l'ellipsoïde une déformation infiniment petite. On obtient ainsi un nouveau volume attirant, infiniment voisin de E, qui peut être considéré comme obtenu en ajoutant ou retranchant certaines portions de la même matière en certains points. On peut, en effet, considérer l'épaisseur ζ comme positive en certains endroits et négative en d'autres.

Soit V' le potentiel de cette couche. Nous savons le calculer et l'exprimer par les formules étudiées ci-dessus. L'ensemble de l'ellipsoïde de la couche crée un certain potentiel V_1 qui donne la relation

$$V' = V_1 - V. \tag{185}$$

C'est à l'aide de cette formule générale et en calculant cette différence $V_1 - V$ que Poincaré trouve les principaux résultats nouveaux de la théorie.

Si le volume reste constant, il faut ajouter comme condition complémentaire la relation

$$\int \zeta \, d\sigma = 0.$$

69. **Potentiel de l'ellipsoïde.** — Nous allons d'abord, par cette méthode générale, établir les formules qui donnent le potentiel d'un ellipsoïde homogène exprimé au moyen des fonctions de Lamé.

Considérons l'ellipsoïde E rapporté à ses axes $Oxyz$. Soient $P(x, y, z)$ un point de l'espace et $V(x, y, z)$ le potentiel en ce point. Déplaçons infiniment peu, par une translation suivant l'axe des x, l'ellipsoïde E qui viendra ainsi en E' (*fig.* 34). Le centre s'est déplacé de $OO' = \varepsilon$. Le potentiel en P dû à E' est égal à V_1 et ce V_1 est égal au potentiel de E sur un point P' de coordonnées $x - \varepsilon, y, z$. En appelant donc V' le potentiel de la couche, on aura

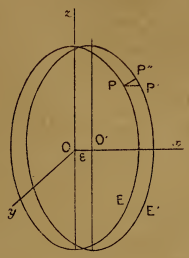
$$V' = V_1 - V = V(x - \varepsilon, y, z) - V(x, y, z) = -\varepsilon \frac{\partial V}{\partial x}.$$

Ainsi, pour calculer $\frac{\partial V}{\partial x}$, il suffira de calculer le potentiel de la

couche comprise entre les deux ellipsoïdes et, pour cela, il suffira de calculer ζ comme on l'a vu.

Soit donc P un point de la surface E. Menons la normale PP″

Fig. 34.



qui rencontre en P″ l'ellipsoïde E′. Menons de plus PP′ parallèle à l'axe des x. Le triangle infinitésimal PP″P′ est rectangle en P″. On a alors

$$\zeta = \mathrm{PP''} = \mathrm{PP'} \cos \mathrm{P''PP'} = \varepsilon \cos(n, x),$$

ou, en appelant ρ_0 la valeur de ρ qui correspond à l'ellipsoïde E, et l'indice o signifiant qu'on fait $\rho = \rho_0$, on a

$$\zeta = \varepsilon h_1 \mathrm{R}_4^0 l_0 \mathrm{M}_1 \mathrm{N}_1. \tag{186}$$

L'expression de la couche n'ayant qu'un seul terme, nous savons écrire le potentiel de cette couche. On a (n° 66)

$$\mathrm{V}'_0 = \alpha \mathrm{R}_2^0 \mathrm{S}_1^0 \mathrm{M}_1 \mathrm{N}_1 = \frac{4\pi}{3} \varepsilon h_1 \mathrm{R}_4^0 . \mathrm{R}_1^0 \mathrm{S}_1^0 \mathrm{M}_1 \mathrm{N}_1,$$

d'où, d'après les formules (174) et (175),

$$\mathrm{V}'_i = \frac{4\pi}{3} \varepsilon h_1 \mathrm{R}_4^0 . \mathrm{S}_1^0 \mathrm{R}_1 \mathrm{M}_1 \mathrm{N}_1, \qquad \mathrm{V}'_e = \frac{4\pi}{3} \varepsilon h_1 \mathrm{R}_4^0 . \mathrm{R}_1^0 \mathrm{S}_1 \mathrm{M}_1 \mathrm{N}_1 \tag{187}$$

A l'intérieur, on aura pour les composantes de la force dérivée du potentiel

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial x} &= -\frac{1}{\varepsilon} \mathrm{V}'_i = -\frac{4\pi}{3} \mathrm{R}_3^0 \mathrm{S}_1^0 x = -\mathrm{T} \frac{\mathrm{S}_1^0}{\mathrm{R}_1^0} x, \\ \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial y} &= -\mathrm{T} \frac{\mathrm{S}_2^0}{\mathrm{R}_2^0} y, \quad \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial z} = -\mathrm{T} \frac{\mathrm{S}_3^0}{\mathrm{R}_3^0} z. \end{aligned} \right. \tag{188}$$

Ce sont des fonctions linéaires de x, y, z; donc V_i sera une fonction quadratique de x, y, z dont l'expression s'obtient immédiatement par intégration

$$V_i = -\frac{T}{2}\left(\frac{S_1^0}{R_1^0}x^2 + \frac{S_2^0}{R_2^0}y^2 + \frac{S_3^0}{R_3^0}z^2\right). \tag{189}$$

Pour *l'extérieur*, on aura de même

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial x} &= -\frac{1}{\varepsilon}V'_e = -\frac{4\pi}{3}R_1^0 R_1^0 \frac{S_1}{R_1}x = -T\frac{S_1}{R_1}x, \\ \frac{\partial V}{\partial y} &= -T\frac{S_2}{R_2}y, \qquad \frac{\partial V}{\partial z} = -T\frac{S_3}{R_3}z. \end{aligned}\right. \tag{190}$$

Seulement ici les coefficients de x, y, z ne sont plus constants, mais fonctions de ρ. Les dérivées du potentiel ne sont plus linéaires en x, y, z. L'intégration donnera également le potentiel, mais sous une forme plus compliquée.

70. **Équations des figures ellipsoïdales d'équilibre au moyen des fonctions de Lamé.** — Nous supposons que l'ellipsoïde tourne autour de Ox. S'il y a équilibre relatif, la fonction U est constante en tous les points de l'ellipsoïde, c'est-à-dire de la surface libre

$$U = V + \frac{\omega^2}{2}(y^2 + z^2) = \text{const.} \tag{191}$$

En remplaçant V par sa valeur trouvée ci-dessus (189), il vient

$$-T\frac{S_1^0}{R_1^0}x^2 + \left(\omega^2 - T\frac{S_2^0}{R_2^0}\right)y^2 + \left(\omega^2 - T\frac{S_3^0}{R_3^0}\right)z^2 = \text{const.}$$

La surface définie par cette équation est la surface même de l'ellipsoïde

$$\frac{x^2}{(R_1^0)^2} + \frac{y^2}{(R_2^0)^2} + \frac{z^2}{(R_3^0)^2} - 1 = 0.$$

Ces deux équations représentant la même surface sont identiques. On a, en les identifiant et supprimant les indices o,

$$TS_1R_1 = TS_2R_2 - \omega^2R_2^2 = TS_3R_3 - \omega^2R_3^2,$$

ou encore en résolvant par rapport à $\frac{\omega^2}{T}$,

$$(192) \qquad \frac{\omega^2}{T} = \frac{S_2R_2 - S_1R_1}{R_2^2} = \frac{S_3R_3 - S_1R_1}{R_3^2}.$$

D'autre part, le volume est

$$T = \frac{4}{3}\pi R_1 R_2 R_3.$$

Ce sont les équations trouvées au Chapitre II (61), (62) pour définir la surface d'équilibre. Elles sont mises seulement sous une autre forme. On se donne T et ω et les équations donnent les axes. Ici elles détermineront $\rho^2 - a^2$, $\rho^2 - b^2$, $\rho^2 - c^2$, la valeur de ρ étant celle qui correspond à la surface libre. Nous pourrons donc écrire les deux équations suivantes, qui ne dépendent que des rapports des axes :

$$(193) \qquad \frac{\omega^2}{T} = \frac{S_2R_2 - S_1R_1}{R_2^2},$$

$$(194) \qquad \frac{S_2R_2 - S_1R_1}{R_2^2} = \frac{S_3R_3 - S_1R_1}{R_3^2}.$$

Ces formules donnent les rapports des axes. On déduira ensuite leur valeur exacte au moyen de l'équation du volume.

Remarque. — Puisque ω^2 et T sont toujours positifs, on doit avoir, d'après (192), les relations $S_2R_2 - S_1R_1 > 0$ et $S_3R_3 - S_1R_1 > 0$. En effet, on a

$$S_1 = R_1 \int_0^u \frac{3\,du}{R_1^2}, \qquad S_2 = R_2 \int_0^n \frac{3\,dx}{R_2^2},$$

d'où

$$S_2R_2 - S_1R_1 = R_2^2 \int_0^u \frac{3\,du}{R_2^2} - R_1^2 \int_0^u \frac{3\,du}{R_2^2}.$$

Faisons passer les facteurs R_2^2 et R_1^2 sous le signe d'intégration en les désignant par $R_2'^2$ et $R_1'^2$. On peut écrire

$$\frac{S_2R_2 - S_1R_1}{3} = \int_0^u \left(\frac{R_2'^2}{R_2^2} - \frac{R_1'^2}{R_1^2}\right) du = \int_0^u \frac{R_2'^2}{R_1^2}\left(\frac{R_1^2}{R_2^2} - \frac{R_1'^2}{R_2'^2}\right) du.$$

Or, le rapport $\frac{R_1^2}{R_2^2} = \frac{\rho^2 - a^2}{\rho^2 - b^2}$ décroît constamment de 1 à 0 quand

ρ^2 varie de ∞ à a^2, c'est-à-dire quand u varie de o à ω. Comme $\frac{R_1'^2}{R_2'^2}$ est la valeur que prend $\frac{R_1^2}{R_2^2}$ à la limite d'intégration u, on a constamment $\frac{R_1^2}{R_2^2} > \frac{R_1'^2}{R_2'^2}$. L'intégrale est donc positive et l'on a bien

$$S_2 R_2 - S_1 R_1 > 0. \tag{195}$$

71. **Résolution des équations d'équilibre.** — On a deux cas, comme on sait.

1° *Ellipsoïdes de Maclaurin.* — Faisons $b = c$, c'est-à-dire $R_2 = R_3$. L'équation (194) est satisfaite. Il reste à discuter l'équation (195). On introduit pour cela le paramètre l, rapport de la distance focale, au petit axe. Il est inutile de recommencer cette discussion qui donne deux figures ellipsoïdales si la vitesse de rotation reste au-dessous d'un certain maximum. (*Voir* Chap. II.)

2° *Ellipsoïdes de Jacobi.* — Nous supposons $R_2 \neq R_3$. Poincaré met alors l'équation (194) sous une forme remarquable que nous allons établir.

Cette équation peut s'écrire d'abord

$$(S_2 R_3 - S_3 R_2) R_2 R_3 = S_1 R_1 (R_3^2 - R_2^2).$$

En remplaçant S_2 et S_3 par leurs expressions

$$S_2 = R_2 \int_0^u \frac{3\,du}{R_2^2}, \qquad S_3 = R_3 \int_0^u \frac{3\,du}{R_3^2},$$

on a

$$3(R_2 R_3)^2 \int_0^u \frac{R_3^2 - R_2^2}{R_2^2 R_3^2}\,du = S_1 R_1 (R_3^2 - R_2^2).$$

Mais on a $R_4 = R_2 R_3$ et, de plus, on peut diviser les deux termes par la quantité constante et non nulle

$$R_3^2 - R_2^2 = (\rho^2 - c^2) - (\rho^2 - b^2) = b^2 - c^2.$$

Il vient donc

$$3 R_4^2 \int_0^u \frac{du}{R_4^2} = S_1 R_1 \qquad \text{ou} \qquad 3 R_4 \frac{S_4}{5} = S_1 R_1.$$

Finalement, on a l'expression remarquable

$$\frac{R_1 S_1}{3} = \frac{R_4 S_4}{5}, \tag{196}$$

et c'est sous cette forme que nous étudierons l'équation (194) dans le cas des ellipsoïdes de Jacobi.

72. **Pesanteur à la surface.** — En un point P de la surface, l'attraction totale sur une masse égale à l'unité est une force normale à la surface. C'est cette force qu'on appelle aussi l'intensité de la pesanteur au point P et qu'on désigne par g. En désignant par U la fonction des forces, et par $\frac{dU}{dn_e}$ la dérivée de U suivant la normale extérieure, on a

$$U = V + \frac{\omega^2}{2}(y^2 + z^2), \qquad g = -\frac{dU}{dn_e}.$$

Puisque l'équilibre existe, il y a identité entre cette fonction U et le premier membre de l'équation de l'ellipsoïde, d'où

$$U = K\left(\frac{x^2}{\rho_0^2 - a^2} + \frac{y^2}{\rho_0^2 - b^2} + \frac{z^2}{\rho_0^2 - c^2} - 1\right) + C,$$

d'où

$$g = -K\frac{\partial f}{\partial n} = -K\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}.$$

Or, nous avons vu que si $f(x, y, z)$ représente un ellipsoïde, ce radical a une expression de la forme $\frac{\text{const.}}{l}$. On a donc la formule

$$gl = \text{const.} \tag{197}$$

Le produit gl est donc constant sur toute la surface de l'ellipsoïde. Pour déterminer la valeur de cette constante, il suffit de la calculer en un point, par exemple au pôle où l'on a $y = z = 0$ et $U = V$, ainsi que $x = R_1^0$:

$$g = -\frac{\partial V}{\partial x} = T\frac{S_1^0}{R_1^0}x = TS_1^0. \tag{198}$$

On a encore au pôle $\mu = b$ et $\nu = c$, puisque $y = 0$ et $z = 0$; on

aura donc pour la valeur de l en ce point (164)

$$l = \frac{1}{\sqrt{(z_0^2 - b^2)(\rho_0^2 - c^2)}} = \frac{1}{R_2^0 R_3^0}. \tag{199}$$

On obtient donc finalement

$$gl = \frac{TS_1^0}{R_2^0 R_3^0} = \frac{4}{3}\pi R_1^0 S_1^0. \tag{200}$$

73. Expression de la déformation de l'ellipsoïde qui fournit une figure d'équilibre infiniment voisine. — Considérons un ellipsoïde en équilibre relatif tournant autour de Ox. Déformons-le en lui ajoutant une couche infiniment mince d'épaisseur tantôt positive et tantôt négative, dont le volume total est nul. Le volume algébrique de la couche étant nul, cela revient bien à une simple déformation.

Nous obtenons ainsi une nouvelle figure constituée par l'ensemble de l'ellipsoïde et de la couche. Si cette surface nouvelle est une surface d'équilibre, la nouvelle fonction de forces est constante en tous les points de la nouvelle surface.

Soient E la surface de l'ellipsoïde primitif et E′ la nouvelle surface (*fig.* 34). La normale extérieure donnera le sens positif de ζ avec $PP'' = \zeta$. La valeur de la fonction des forces U est constante en tous les points de l'ellipsoïde tels que P et représentés par

$$U_0 = V_0 + \frac{\omega^2}{2}(y_0^2 + z_0^2).$$

La valeur, au point voisin P″ de cette fonction U, sera

$$U = U_0 + \frac{dU}{dn}\zeta = U_0 - g\zeta.$$

Cette valeur est la résultante de la rotation et de l'attraction de E en P. Il faut y ajouter le potentiel V′ de la couche sur elle-même, et la nouvelle fonction des forces totales sera en P″

$$U + V' = U_0 - g\zeta + V'.$$

Pour que la nouvelle surface soit une surface d'équilibre, il faut que cette fonction soit constante sur toute la surface E′. Comme U_0

est constant, il faut la condition

$$V' - g\zeta = \text{const.} \tag{201}$$

De plus, nous avons vu que l'expression du développement de ζ en série de produits de Lamé est

$$\frac{\zeta}{l_0} = \sum_0^\infty \beta_k M_k N_k \qquad \text{ou} \qquad \zeta = \sum_0^\infty \beta_k l_0 M_k N_k.$$

Or, le volume de la couche étant nul, on a

$$\int_{E_0} \zeta \, d\sigma = 0 \qquad \text{ou} \qquad \sum_0^\infty \int_{E_0} \beta_k l_0 M_k N_k \, d\sigma = 0.$$

Mais d'après les propriétés des fonctions de Lamé (170), tous les termes sous le signe Σ sont nuls, sauf le premier d'indice 0, car $B_k = \Phi(\mu, \nu)$ est de l'ordre zéro en μ et ν, comme α_k (123) et (127), et l'on a

$$\int_{E_0} \beta_0 l_0 M_0 N_0 \, d\sigma = \beta_0 \int_{E_0} l_0 \, d\sigma = 0.$$

Il s'ensuit que $\beta_0 = 0$ et la série qui donne ζ commence par le terme d'indice 1, à l'exclusion du terme d'indice 0. On aura donc finalement

$$\zeta = \sum_1^\infty \beta_k l_0 M_k N_k. \tag{202}$$

Il faut y joindre l'expression du potentiel de la couche sur elle-même,

$$V'_0 = \sum \alpha_k S_k^0 R_k^0 M_k N_k, \qquad \alpha_k = \frac{4\pi}{2n+1} \beta_k. \tag{203}$$

Ces trois formules permettent de passer de la couche à son potentiel ou inversement.

74. Détermination des coefficients qui définissent la déformation. — Portons ces valeurs de V'_0 et de ζ dans (201) et rempla-

çons gl_0 par sa valeur (200), il vient, en supprimant les indices 0,

$$\sum_1^\infty \beta_k \left(\frac{4\pi}{2n+1} S_k R_k - gl_0 \right) M_k N_k$$
$$= \sum_1^\infty 4\pi\beta_k \left(\frac{S_k R_k}{2n+1} - \frac{S_1 R_1}{3} \right) M_k N_k = \text{const.}$$

Cette équation a lieu en tous les points de l'ellipsoïde, quelles que soient les valeurs données à μ et ν. Elle représente donc le développement d'une constante en produits de Lamé. Comme ce développement n'est possible que d'une seule manière, il faut que tous les coefficients soient nuls, sauf celui de degré 0, qui est constant. Or, on vient de voir qu'il est nul. Donc la constante et tous les coefficients sont nuls.

Pour que la couche ζ donne une figure d'équilibre, il y a donc une infinité de conditions à satisfaire. Elles sont données par la relation générale

$$(204) \qquad \beta_k \left(\frac{S_k R_k}{2n+1} - \frac{S_1 R_1}{3} \right) = 0 \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots, \infty).$$

Chacune de ces relations est le produit de deux facteurs. Si le second facteur n'est pas nul, β_k est nul. Au contraire, β_k est arbitraire et non nul si le second facteur est nul. Si ce second facteur ne pouvait pas s'annuler, tous les β_k seraient nuls et il n'y aurait pas de figure d'équilibre.

Examinons cette relation pour $n = 1$. On a $2n + 1 = 3$, et l'on peut supprimer le dénominateur. Pour $k = 1$, il vient

$$(205) \qquad \beta_1 (S_1 R_1 - S_1 R_1) = 0.$$

Le second terme est nul, donc β_1 reste arbitraire.

Pour $k = 2$ et $k = 3$, on a

$$(206) \qquad \beta_2 (S_2 R_2 - S_1 R_1) = 0, \qquad \beta_3 (S_3 R_3 - S_1 R_1) = 0.$$

Or, les parenthèses ne sont pas nulles, d'après la formule (195); on a donc $\beta_2 = 0$ et $\beta_3 = 0$. On a vu que R_1, R_2, R_3 sont les trois seules fonctions correspondant au cas $n = 1$.

Pour $n = 2$, on a à considérer les cinq fonctions d'indice $k = 4 \ldots 8$. Il faut de plus, ici, séparer le cas où l'on cherche les

figures voisines des ellipsoïdes de Maclaurin de ceux où l'on cherche les figures voisines des ellipsoïdes de Jacobi. Supposons d'abord ce dernier cas. On a d'abord, pour $k = 4$,

$$\beta_4\left(\frac{S_4 R_4}{5} - \frac{S_1 R_1}{3}\right) = 0. \tag{207}$$

Le facteur entre parenthèses est toujours nul quand il s'agit d'ellipsoïdes de Jacobi. Donc β_4 n'est pas nul, mais quelconque.

Pour les autres valeurs de k le second facteur ne sera pas nul en général et ne pourra l'être que pour certaines valeurs numériques spéciales des axes de l'ellipsoïde. Mais, pour un ellipsoïde quelconque, il n'en sera pas ainsi et les β_5, β_6, ... seront nuls.

75. **Signification des deux premiers coefficients.** — Nous venons de voir que le problème posé admet au moins une série de solutions, quel que soit l'ellipsoïde d'où l'on part, c'est-à-dire que les coefficients β_k ne sont pas tous nuls, même pour un ellipsoïde quelconque. En effet, nous avons vu que β_1 et β_4 restent toujours arbitraires, de sorte que nous obtiendrons encore une figure d'équilibre en considérant la couche

$$\zeta = \beta_1 l_0 M_1 N_1 + \beta_4 l_0 M_4 N_4. \tag{208}$$

Nous allons voir qu'en réalité cette couche ne donne pas une nouvelle figure d'équilibre, mais seulement un déplacement de la première.

Comme β_1 et β_4 sont infiniment petits, nous pouvons considérer cette couche comme la superposition de deux autres :

$$\zeta = \beta_1 l_0 M_1 N_1, \qquad \zeta = \beta_4 l_0 M_4 N_4.$$

Considérons la première. Nous avons vu (186) n° 69 qu'elle s'obtient en faisant glisser l'ellipsoïde d'une quantité infiniment petite OO′ parallèlement à Ox. On a alors

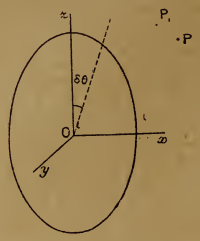
$$\beta_1 = \varepsilon h_1 R_1^0.$$

Cette solution est d'ailleurs évidente, puisque c'est le même ellipsoïde tournant autour du même axe de rotation.

Le second cas s'obtient, comme nous allons le voir, en faisant tourner les axes Oy, Oz et la figure de l'ellipsoïde autour de

l'axe Ox. Soient, en effet, $\delta\theta$ l'angle dont on a fait tourner ces axes et P un point de coordonnées x, y, z (*fig.* 35). Appelons V le

Fig. 35.



potentiel en P dû à l'ellipsoïde primitif et V_1 le même potentiel après la rotation. Or V_1 peut s'obtenir en laissant l'ellipsoïde fixe et en faisant tourner P de $-\delta\theta$ pour l'amener en P_1. Le potentiel V_1 en P est le même que le potentiel V en P_1, c'est-à-dire

$$V_1(x, y, z) = V(x_1, y_1, z_1).$$

Mais

$$x_1 = x, \qquad y_1 = y + z\,\delta\theta, \qquad z_1 = z - y\,\delta\theta,$$

donc

$$V_1 = V(x, y + z\,\delta\theta, z - y\,\delta\theta) = V(x, y, z) + \delta\theta\left(z\frac{\partial V}{\partial y} - y\frac{\partial V}{\partial z}\right).$$

En appelant V' le potentiel dû à la couche en P, on a, en tenant compte de (188),

$$V' = V_1 - V = \delta\theta\left(\frac{S_3^0}{R_3^0} - \frac{S_2^0}{R_2^0}\right) T yz.$$

La parenthèse serait nulle dans le cas de l'ellipsoïde de Maclaurin. Elle ne l'est pas dans celui de Jacobi. Il est évident, d'ailleurs, que la couche serait nulle dans le premier cas, l'ellipsoïde étant de révolution. Remplaçons alors y et z par leurs valeurs à la surface (181), il vient

$$V' = \delta\theta\left(\frac{S_3^0}{R_3^0} - \frac{S_2^0}{R_2^0}\right) T h_2 h_3 R_2^0 R_3^0 M_2 N_2 M_3 N_3 = \alpha M_1 N_1.$$

La couche correspondant à ce potentiel serait donc, d'après (177'), de la forme

$$\zeta = \beta l_0 M_1 N_1.$$

C'est bien le cas de $k = 4$. Les solutions véritables commenceront donc à $k = 5$. Elles ne pourront d'ailleurs apparaître qu'en des points séparés, sur la courbe d'équilibre, puisqu'elles vérifient une équation dépendant d'un nombre entier $2n + 1$.

Les ellipsoïdes d'équilibre spéciaux qui sont de cette nature, c'est-à-dire tels qu'il existe des figures d'équilibre infiniment voisines, seront appelés *ellipsoïdes de bifurcation*.

76. **Discussion générale des équations de condition.** — Nous allons discuter d'abord, avec Poincaré, l'équation générale

$$(209) \qquad F = \frac{R_k S_k}{2n+1} - \frac{R_i S_i}{2p+1} = 0,$$

R_k et S_k étant d'ordre n, R_i et S_i étant d'ordre p. On peut d'ailleurs avoir $p = n$, pourvu que l'on ait $i \neq k$.

Supposons a^2, b^2, c^2 donnés. Il ne reste plus qu'une variable ρ^2 variant de ∞ à a^2, et la variable elliptique correspondante u varie de 0 à ∞. Considérons alors, au lieu de F, la fonction auxiliaire $F_1 = \frac{F}{R_k^2}$. Comme R_k a ses racines comprises entre a^2 et b^2, il ne s'annule pas dans le champ de variation de ρ, et par conséquent F_1 aura les mêmes racines que F. Nous pouvons écrire

$$(210) \qquad F_1 = \frac{1}{2n+1}\frac{S_k}{R_k} - \frac{1}{2p+1}\frac{S_i}{R_i}\left(\frac{R_i}{R_k}\right)^2.$$

En dérivant par rapport à u, on a

$$\frac{dF_1}{du} = \frac{1}{R_k^2} - \frac{1}{R_i^2}\frac{R_i^2}{R_k^2} - \frac{1}{2p+1}\left[\frac{S_i}{R_i}\frac{d}{du}\left(\frac{R_i}{R_k}\right)^2 = \frac{-1}{2p+1}\frac{S_i}{R_i}\frac{d}{du}\left(\frac{R_i}{R_k}\right)^2,\right.$$

car nous avons vu que l'on avait

$$\frac{S_k}{R_k} = \int_0^u \frac{2n+1}{R_k^2}\,du, \qquad \text{d'où} \qquad \frac{d}{du}\left(\frac{S_k}{R_k}\right) = \frac{2n+1}{R_k^2}.$$

Nous pourrons donc encore écrire

$$(211) \qquad \frac{dF_1}{du} = \frac{-2}{2p+1}\frac{S_i(R_i' R_k - R_k' R_i)}{R_k^3} = \frac{-2}{2p+1}\frac{S_i}{R_k}\frac{d}{du}\left(\frac{R_i}{R_k}\right).$$

S_i et R_k conservent un signe constant dans l'intervalle de variation.

Donc l'expression ne changera de signe qu'avec la dérivée du second membre.

Premier cas. — Si le rapport $\frac{R_i}{R_k}$ varie dans le même sens, sa dérivée conserve un signe constant et $\frac{dF_1}{du}$ également. Donc F_1 variera toujours dans le même sens avec ρ et ne pourra s'annuler qu'avec $\rho = \infty$, car alors F_1 est de l'ordre de $\frac{1}{\rho}$.

Ainsi, dans ce cas, quand ρ part de l'infini et va vers a^2, F_1 part de o et garde un signe constant. On peut rejeter sans discussion la racine $\rho = \infty$ qui donne une sphère, car alors les axes sont égaux à l'unité. La fonction F_1, et par conséquent la fonction F, n'ont pas de racine, quand $\frac{R_i}{R_k}$ varie dans le même sens. Il n'y a pas de figure d'équilibre.

Second cas. — Le rapport $\frac{R_i}{R_k}$ ne varie pas toujours dans le même sens. Développons sa dérivée; on pourra écrire

$$\frac{dF_1}{du} = \frac{-2}{2p+1}\,\frac{S_i}{R_k^3}\,\varphi \qquad (\varphi = R_i' R_k - R_k' R_i).$$

Son signe ne dépend que de celui du numérateur, c'est-à-dire de φ. Prenons de nouveau la dérivée de ce numérateur; on a, en remplaçant les R'' par leurs valeurs (141),

$$(212) \qquad \varphi' = R_i'' R_k - R_k'' R_i = R_i R_k \left\{ [p(p+1) - n(n+1)]\rho^2 + H - H_1 \right\}.$$

Or R_i et R_k conservent un signe constant; par conséquent, φ' ne peut avoir qu'une racine en ρ^2 supérieure à a^2. Alors, d'après le théorème de Rolle, φ aura au plus deux racines et F_1 au plus trois dans le même intervalle. En rejetant la racine infinie, on voit donc que F_1, et par conséquent F, auront o, 1 ou 2 racines.

Remarque. — Si $p = n$, le crochet de φ' est indépendant de ρ et φ' ne peut plus s'annuler. Dans ce cas, F n'a plus que o ou 1 racine, la racine infinie exclue.

Revenons à l'équation de condition proprement dite où l'on a fait $i = p = 1$:

$$(213) \qquad F = \frac{R_1 S_1}{3} - \frac{R_k S_k}{2n+1} = 0.$$

Or on a vu au n° 50 que R_k pouvait prendre huit formes différentes, dont quatre sont divisibles par $R_1 = \sqrt{\rho^2 - a^2}$. Pour ces quatre formes, le rapport $\frac{R_k}{R_1}$ conserve un signe constant. Il n'y a pas de solution.

Pour quatre formes seulement, il peut y avoir des racines. Donnons à ρ une valeur très grande; la valeur principale de F sera

$$F = \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2n+1}\right)\frac{1}{\rho}$$

On a donc $F \geqq 0$ pour $n \geqq 1$ et $\rho = \infty$. Faisons de même $\rho^2 = a^2$, on aura $R_1 = 0$ et $F < 0$.

Il y a donc un nombre impair de racines dans l'intervalle. Ce nombre de racines ne peut être que 0, 1 ou 2 d'après la discussion précédente. Pour chaque valeur de n, il y a donc *une racine et une seule pour chacune des quatre formes.*

Remarque. — Pour $n = 1$, il n'y a pas de racines, car les quantités $R_1S_1 - R_2S_2$ et $R_1S_1 - R_3S_3$ correspondant à ces deux cas ne s'annulent pas. D'ailleurs

$$R_k^2 = R_2^2 = \rho^2 - b^2 \qquad \text{ou} \qquad R_k^2 = R_3^2 = \rho^2 - c^2,$$

et le rapport $\frac{R_k^2}{R_1^2}$ varie toujours dans le même sens.

Cas particulier. — Considérons l'équation F des ellipsoïdes de Jacobi :

$$\frac{R_1S_1}{3} - \frac{R_4S_4}{5} = 0, \qquad R_4 = \sqrt{(\rho^2 - b^2)(\rho^2 - c^2)},$$

R_4 n'est pas divisible par R_1; il y a donc toujours à cette équation une racine et une seule. Ainsi, les quantités a^2, b^2, c^2 étant données, il y a toujours une valeur et une seule de ρ^2 vérifiant cette équation. Il y aura donc toujours, parmi les ellipsoïdes homofocaux à un ellipsoïde donné, un ellipsoïde homothétique à un ellipsoïde de Jacobi et un seul.

77. Ellipsoïdes de Maclaurin. — Puisqu'il s'agit d'ellipsoïdes de révolution, les deux conditions à réaliser pour que ces ellipsoïdes

soient de bifurcation seront

$$(214) \qquad R_2 = R_3 \quad \text{et} \quad \frac{R_1 S_1}{3} = \frac{R_k S_k}{2n+1}.$$

Elles permettront de déterminer, par exemple, a et c, et nous pourrons considérer comme inconnus ρ et b.

Nous avons vu, au n° 55, que, dans le cas d'un ellipsoïde de révolution, les fonctions de Lamé dégénèrent en fonctions sphériques. On pose

$$\frac{z}{y} = \operatorname{tang}\varphi, \qquad t = \sqrt{\frac{a^2-\mu^2}{a^2-c^2}},$$

où φ représente la longitude du point, et les fonctions de Lamé peuvent s'écrire

$$M_k = h(1-t^2)^{\frac{p}{2}} \frac{d^{n+p}(1-t^2)^n}{dt^{n+p}} = F(t) = F\left(\sqrt{\frac{a^2-\mu^2}{a^2-c^2}}\right),$$

$$R_k = F(is) = h(1+s^2)^{\frac{p}{2}} \frac{d^{n+p}(1+s^2)^n}{ds^{n+p}}.$$

On a posé $t = is$ dans R_k, car $\rho^2 > a^2$. Enfin N_k peut prendre l'une des deux formes $\cos p\varphi$ et $\sin p\varphi$.

Appliquons les résultats des discussions précédentes. Pour que l'équation de condition ait des racines, il faut que R_k ne soit pas divisible par R_1, c'est-à-dire par s, car $R_1 = s$, à un facteur constant près.

Or $(1+s^2)^{\frac{p}{2}}$ ne contient pas s en facteur. Il faut donc que la dérivée $\frac{d^{n+p}(1+s^2)^n}{ds^{n+p}}$ ne le contienne pas non plus, c'est-à-dire qu'*il faut que $n+p$ soit pair*; p sera de même parité que n.

Il est facile de voir que cette condition revient à rejeter les quatre formes divisibles par R_1, comme on l'a démontré ci-dessus.

Soit n pair (les raisonnements seraient les mêmes pour n impair). Il faut que p soit pair et compris entre o et n. Déterminons la valeur de la déformation ζ. A chaque valeur de p correspondront deux solutions :

$$\begin{aligned} M_k &= F(t) = X_n^p \\ N_k &= \cos p\varphi \end{aligned} \quad \text{et} \quad \begin{aligned} M_{k'} &= X_n^p, \\ N_{k'} &= \sin p\varphi. \end{aligned}$$

Nous aurons donc deux valeurs de β_k arbitraires, d'où

$$\frac{\zeta}{l_0} = \Sigma \beta_k M_k N_k = \beta_k X_n'' \cos p\varphi + \beta_{k'} X_n'' \sin p\varphi,$$

$$V_0' = \frac{4\pi}{2n+1}(\beta_k R_k^0 S_k^0 X_n'' \cos p\varphi + \beta_{k'} R_{k'}^0 S_{k'}^0 X_n'' \sin p\varphi).$$

On peut simplifier l'expression de ζ et éliminer l'un des β_k arbitraires en posant

$$\beta_{k'} = \beta_k \operatorname{tang} \alpha.$$

On a

$$(215) \quad \frac{\zeta}{l_0} = \frac{\beta_k X_n''}{\cos\alpha}(\cos\alpha \cos p\varphi + \sin\alpha \sin p\varphi) = A X_n'' \cos(p\varphi - \alpha).$$

Il suffit de faire tourner les axes de l'angle α dans le sens convenable, pour ramener la solution générale à la forme simple

$$(215') \qquad \frac{\zeta}{l_0} = \beta X_n'' \cos p\varphi.$$

Soit $p = 0$. On a pour la solution

$$(216) \quad \frac{\zeta}{l_0} = \beta X_n^0, \qquad X_n^0 = h\frac{d^n(1-t^2)^n}{dt^n}, \qquad t = \sqrt{\frac{a^2-\mu^2}{a^2-c^2}}.$$

Alors ζ s'annule pour n valeurs de μ. Or, les courbes $\mu =$ const. sont des parallèles de la surface, symétriques deux à deux par rapport au plan des yz. Donc ζ s'annule et change de signe sur les parallèles. De plus, $t = 0$ n'est pas racine et ζ n'est pas nul sur l'équateur où $\mu = a$. De même $t = 1$ n'est pas racine, car X_n^0 est indépendant de $(1 - t^2)$ et ζ n'est pas nul au pôle où $\mu = c$.

On obtient donc une figure à *cannelures* (*fig.* 36). C'est une figure d'équilibre zonale d'après la terminologie anglaise du n° 36. On peut supposer, avec Poincaré, que, la vitesse de rotation augmentant, les cannelures se creuseront à mesure que la vitesse de rotation augmentera, et que l'équilibre pourra subsister. La démonstration n'est rigoureuse que dans le voisinage de la figure ellipsoïdale.

Soit $p = n$. On a les solutions

$$(217) \quad \frac{\zeta}{l_0} = \beta X_n^n \cos n\varphi, \qquad X_n^n = h_1(1-t^2)^{\frac{n}{2}}\frac{d^{2n}(1-t^2)^n}{dt^{2n}} = h_1(1-t^2)^{\frac{n}{2}}.$$

ζ ne peut s'annuler que pour $\mu = c$ ou pour $\cos n\varphi = 0$. Donc ζ

s'annule aux pôles et le long d'une série de n méridiens symétriques par rapport au plan xy et au plan bissecteur de l'un quel-

Fig. 36.

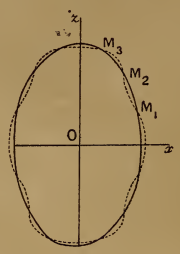
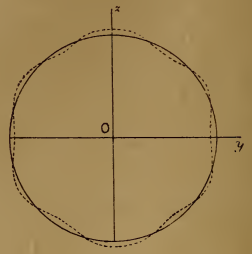


Fig. 36 *bis*.



conque de ces *fuseaux*. C'est une figure d'équilibre sectoriale (*fig.* 36 *bis*).

Soit le cas général $o < p < n$. On a

$$\frac{\zeta}{l_0} = \beta X_n^p \cos p\varphi. \tag{218}$$

ζ s'annule à la fois sur une série de méridiens et sur une série de parallèles qui découpent une figure d'équilibre tesserale, formant un véritable *réseau*, une sorte de damier, à la surface de l'ellipsoïde, et où la déformation est alternativement positive et négative à l'intérieur de chacune des mailles.

78. **Ellipsoïdes donnant d'autres ellipsoïdes.** — Nous allons rechercher, parmi les figures de bifurcation des ellipsoïdes, celles qui donnent naissance à un autre ellipsoïde infiniment voisin du premier.

Or, V étant le potentiel de l'ellipsoïde primitif, V_1 le potentiel de l'ellipsoïde déformé, ou de la nouvelle figure d'équilibre, V′ le potentiel de la couche sur elle-même, on a vu que

$$V_1 = V + V'.$$

Or, si la figure déformée est aussi un ellipsoïde, V_1 et V sont tous deux, à l'intérieur et sur la surface, des fonctions du second degré des coordonnées x, y, z. Dans ce cas, V'_0 doit être également du

second degré. Mais on a

$$V'_0 = \frac{4\pi\beta}{2n+1} S_k^0 R_k M_k N_k.$$

Il faut donc finalement que le produit de Lamé $R_k M_k N_k$ soit une fonction de Lamé du second ordre, c'est-à-dire $3 < k < 9$.

Parmi les cinq fonctions de cet ordre, déterminées aux n°s 56 et 67, il faut éliminer d'abord R_5 et R_6 qui sont divisibles par R_1. Il reste

$$R_1 = \sqrt{(\rho^2 - b^2)(\rho^2 - c^2)}, \qquad R_7 = \rho^2 - \alpha_1, \qquad R_8 = \rho^2 - \alpha_2.$$

L'équation du second degré qui donne α_1 et α_2 peut, d'après le n° 32, être mise sous la forme

$$(218') \qquad \frac{1}{\alpha - a^2} + \frac{1}{\alpha - b^2} + \frac{1}{\alpha - c^2} = 0.$$

On voit, par substitution, que α_1 est compris entre a^2 et b^2, et α_2 compris entre b^2 et c^2, c'est-à-dire

$$a^2 > \alpha_1 > b^2 > \alpha_2 > c^2.$$

Ces inégalités achèvent de caractériser les nombres α_1 et α_2 et, par conséquent, les fonctions R_7 et R_8, qu'il faut étudier, ainsi que R_4.

Première solution : $R_k = R_4$. Nous avons alors

$$\frac{R_1 S_1}{3} = \frac{R_4 S_4}{5}, \qquad b = c.$$

L'ellipsoïde qui satisfait à ces deux conditions est à la fois de Maclaurin et de Jacobi. C'est l'ellipsoïde de bifurcation E.

Déterminons plus complètement les données de la solution. On a ici

$$R_4 = \rho^2 - c^2.$$

D'après la discussion du numéro précédent, on voit que l'on a $p = n = 2$. En effet, on a alors

$$R_k = F(is) = h_1(1 + s^2) = K(\rho^2 - c^2) = KR_4.$$

Le produit de Lamé correspondant sera donc

$$F(is)F(t)\cos 2\varphi \qquad \text{ou} \qquad F(is)F(t)\sin 2\varphi.$$

Il faut prendre $\sin 2\varphi$. En effet, on a $R_4 = R_2 R_3$. Or, en passant à la limite dans le cas de la dégénérescence, on a, à un facteur constant près,

$$R_2 M_2 N_2 = y, \qquad R_3 M_3 N_3 = z.$$

Le produit de Lamé $R_4 M_4 N_4$ contiendra donc yz, qui lui-même, à la limite, contient $\cos\varphi \sin\varphi = \frac{1}{2}\sin 2\varphi$. On aura donc finalement

$$R_4 M_4 N_4 = F(is) F(t) \sin 2\varphi.$$

Deuxième solution : $R_k = R_8$. Il est aisé de voir que l'on a, F étant la même fonction que précédemment,

$$R_8 M_8 N_8 = F(is) F(t) \cos 2\varphi.$$

En effet, quand b tend vers c, la racine α_2 comprise entre b^2 et c^2 devient égale à c^2 et l'on a

$$R_8 = \rho^2 - \alpha_2 = \rho^2 - c^2 = R_4.$$

Il s'introduira donc la même fonction $F(is)\ F(t)$, mais tandis que N_4 tendait vers $\sin 2\varphi$, ici N_8 tendra vers $\cos 2\varphi$.

Ces deux cas, d'ailleurs, se confondent, car il suffit de faire tourner les axes de $\frac{\pi}{4}$ pour changer $\sin 2\varphi$ en $\cos 2\varphi$. Ces deux solutions donnent donc le même ellipsoïde.

Troisième solution. : $R_k = R_7$. Nous voyons, par exclusion, sans avoir besoin de faire les calculs, que cet ellipsoïde correspond au cas $n = 2$ et $p = 0$, d'après la discussion du numéro précédent. Il vient alors

$$R_7 = h_1 \frac{d^2(1+s^2)^2}{ds^2}, \qquad M_7 = h \frac{d^2(1-t^2)^2}{dt^2}, \qquad N_7 = \text{const.},$$

R_7 et M_7 sont des polynomes de Legendre. La valeur de la constante est facile à déterminer, car ν devient égal à c et N_7 se réduit à $c^2 - \alpha_1$.

On peut, d'ailleurs, dans ce cas, obtenir facilement l'expression en x, y, z du produit $R_7 M_7 N_7$. Il suffit de faire $\lambda^2 = \alpha_1$ dans l'identité fondamentale. Il vient

$$R_7 M_7 N_7 = K\left(\frac{x^2}{\alpha_1 - a^2} + \frac{y^2 + z^2}{\alpha_1 - c^2} - 1\right).$$

79. Interprétation de ces solutions. — Pour savoir quels sont les ellipsoïdes de Maclaurin qui fournissent ces solutions, nous allons chercher si les ellipsoïdes infiniment voisins sont de révolution ou non. Or, nous avons en tous les points de la couche, c'est-à-dire sur l'ellipsoïde primitif V^0 et sur l'ellipsoïde dérivé V_1^0,

$$V_1^0 = V^0 + V'^0 \qquad \text{avec } V^0 = A x^2 + B(y^2 + z^2) + C.$$

Pour $R_k = R_7$ (*troisième solution*), on a

$$V'^0 = \varepsilon B_7 M_7 N_7 = K'\left(\frac{x^2}{\alpha_1 - a^2} + \frac{y^2 + z^2}{\alpha_1 - c^2} - 1\right),$$

alors V_1^0 pourra se mettre sous la forme

$$V_1^0 = A' x^2 + B'(y^2 + z^2) + C'.$$

Le nouveau potentiel provient d'un ellipsoïde de révolution.

Il y a donc un ellipsoïde de Maclaurin qui admet une figure d'équilibre infiniment voisine, qui est encore de révolution, et cela en conservant la même vitesse de rotation, comme nous l'avons admis. Reportons-nous à la courbe des ellipsoïdes de Maclaurin, on voit qu'il n'y a qu'un ellipsoïde qui en admette un autre infiniment voisin avec la même vitesse de rotation, c'est celui qui occupe le sommet de la courbe qui possède la vitesse de rotation maximum (*fig.* 17, n° 19). En ce point, en effet, pour un petit déplacement parallèle à l'axe des l, la vitesse reste la même et l'aplatissement augmente ou diminue suivant le sens du déplacement.

Le passage d'une figure à l'autre s'explique très bien, d'ailleurs, en se reportant au cas $p = 0$. Ici, on a $n = 2$, et la nouvelle surface coupe l'ancienne suivant deux parallèles symétriques par rapport à l'équateur. On a encore un ellipsoïde de révolution, mais plus aplati ou moins aplati que le précédent, selon le cas (*fig.* 37).

Pour $R_k = R_4$ (*première solution*) ou $R_k = R_8$ (*seconde solution*), l'ellipsoïde n'est plus de révolution. En effet, on a, à un facteur près,

$$R_4 M_4 N_4 = yz, \qquad R_8 M_8 N_8 = y^2 - z^2,$$

et le potentiel résultant prend l'une des deux formes

$$V_1^0 = A' x^2 + B'(y^2 + z^2) + C' yz + D', \qquad V_1^0 = A' x^2 + B' y^2 + C' z^2 + D'.$$

Ces potentiels ne peuvent pas provenir d'ellipsoïdes de révolution.

Nous avons vu que R_1 vérifiait l'équation des ellipsoïdes de Jacobi, et, par conséquent, cet ellipsoïde ne peut être que l'ellipsoïde de bifurcation, commun aux Maclaurin et aux Jacobi, c'est-à-dire l'ellipsoïde E.

Nous voyons, en effet, sur la courbe représentative des deux séries, que si l'on coupe par un plan parallèle au plan horizontal et situé un peu au-dessous de E, on détermine deux ellipsoïdes de Jacobi et un de Maclaurin, qui viennent se confondre quand on se rapproche de F (*fig.* 20 et 21, n° 22).

On voit que cette figure nouvelle correspond bien au cas $p = n$. Ici $n = 2$, et la nouvelle surface coupe l'ancienne suivant deux méridiens, en étant tangente à l'ancienne aux pôles. La figure n'est

Fig. 37.

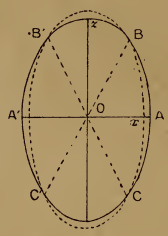
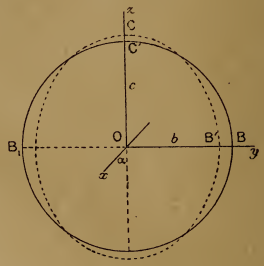


Fig. 37 *bis*.



donc plus de révolution, il apparaît un axe $b \neq c$, alors que a conserve la même valeur; $b = \mathrm{OB}'$ et $c = \mathrm{OC}' > \mathrm{OB}'$ (*fig.* 37 *bis*).

80. **Détermination du premier ellipsoïde de bifurcation.** — Considérons l'ellipse méridienne de l'ellipsoïde de Maclaurin, on a, FF′ étant la distance focale et AA′ le petit axe,

$$l^2 = \frac{\overline{\mathrm{FF}'}^2}{\overline{\mathrm{AA}'}^2} = \frac{\rho^2 - c^2 - (\rho^2 - a^2)}{\rho^2 - a^2} = \frac{a^2 - c^2}{\rho^2 - a^2} = \frac{1}{s^2}.$$

L'origine des coordonnées sur la courbe des ellipsoïdes de Maclaurin s'obtient en faisant $l = 0$, c'est-à-dire ρ et s infinis.

Quand on se déplace sur la courbe, dans le sens des l croissants ou des aplatissements croissants, le premier ellipsoïde de bifurcation que l'on rencontre est l'ellipsoïde E.

Pour le montrer, nous allons démontrer d'abord que la fonction suivante F est toujours positive pour les ellipsoïdes de Maclaurin de bifurcation :

$$F = \frac{R_4 S_4}{5} - \frac{R_k S_k}{2n+1} > 0 \qquad (k > 4).$$

Or, on a ici

$$R_4 = \rho^2 - c^2 = h'(1+s^2), \qquad R_k = h_1(1+s^2)^{\frac{p}{2}} \frac{d^{n+p}(1+s^2)^n}{ds^{n+p}}.$$

Il suffit de démontrer que le rapport $\frac{R_k}{R_4}$ est toujours croissant.

Or, R_k vérifie l'équation (99) des fonctions sphériques. Multiplions-la par $1 - t^2$, remplaçons t par is et posons $du = \frac{ds}{1+s^2}$, il vient

$$\frac{d^2 R_k}{du^2} = R''_k = [n(n+1)(1+s^2) - p^2] R_k;$$

R_4 correspond au cas $p = n = 2$, on a donc également

$$\frac{d^2 R_4}{du^2} = R''_4 = (2 + 6s^2) R_4.$$

Prenons maintenant la dérivée du rapport en question, on a

$$\frac{d}{du}\left(\frac{R_k}{R_4}\right) = \frac{R'_k R_4 - R'_4 R_k}{R_4^2}.$$

Le numérateur s'annule pour $s = 0$, car R'_k et R'_4 contiennent s en facteur. La dérivée de ce numérateur peut s'écrire

$$R''_k R_4 - R''_4 R_k = R_k R_4 \{ n(n+1) - (p^2 + 2) + [n(n+1) - 6] s^2 \}.$$

Or $R_k R_4$ est toujours positif, le crochet aussi pour $n \geqq 2$ et $p \leqq n$. Cette expression est donc toujours positive. Il en est de même de la dérivée du rapport. Ce rapport est donc toujours croissant, et la fonction F garde toujours le même signe.

Or, pour ρ très grand, on a, en ne considérant que les valeurs

principales,

$$\frac{R_1 S_1}{3} = \frac{1}{3\rho}, \qquad \frac{R_4 S_4}{5} = \frac{1}{5\rho}, \qquad \frac{R_k S_k}{2n+1} = \frac{1}{(2n+1)\rho};$$

d'où

$$\frac{R_1 S_1}{3} > \frac{R_4 S_4}{5} > \frac{R_k S_k}{2n+1}.$$

Puisque F conserve toujours le même signe quand ρ varie, la dernière inégalité subsiste toujours. Faisons alors décroître ρ ou s, la valeur $\frac{R_1 S_1}{3}$ sera obligée de traverser $\frac{R_4 S_4}{5}$ avant toutes les autres. La première équation de condition vérifiée sera

$$\frac{R_1 S_1}{3} = \frac{R_4 S_4}{5}.$$

Le premier ellipsoïde de bifurcation atteint sera bien l'ellipsoïde E, quand l'aplatissement augmente.

Posons en général

$$F = \frac{R_i S_i}{2n+1} - \frac{R_k S_k}{2n'+1}.$$

La dérivée du rapport $\frac{R_k}{R_i}$ devient

$$\frac{d}{du}\left(\frac{R_k}{R_i}\right) = \frac{R'_k R_i - R'_i R_k}{R_i^2}.$$

En prenant la dérivée $R''_k R_i = R''_i R_k$ du numérateur, on pourra écrire le coefficient de $R_i R_k$

$$[n'(n'+1) - p'^2 - n(n+1) + p^2] + [n'(n'+1) - n(n+1)]s^2.$$

Nous prenons $n' \geqq n$, c'est-à-dire que nous considérons des expressions R_k du même ordre que R_i ou d'ordre supérieur. Le coefficient de s^2 est alors toujours positif. Déterminons ensuite p et p' de façon que le terme constant soit également positif. Alors l'expression ci-dessus reste toujours positive. Par conséquent, le rapport $\frac{R_k}{R_i}$ reste croissant et F conserve toujours le même signe. On aura donc

$$\frac{R_1 S_1}{3} > \frac{R_i S_i}{2n+1} > \frac{R_k S_k}{2n'+1}.$$

Faisons alors croître ρ ou s, ce qui correspond à des aplatissements croissants ; la valeur $\frac{R_1 S_1}{3}$ traversera successivement les autres valeurs, suivant l'ordre croissant des n. Toutes les solutions ainsi déterminées et correspondant, par exemple, à $n = 2$, seront rencontrées avant celles de $n = 3$ et celles-ci avant celles de $n = 4$, et ainsi de suite, sur la courbe des Maclaurin.

Prenons $n' = n$, l'expression ci-dessus se réduit à $p^2 - p'^2$. On aura alors

$$\frac{R_1 S_1}{3} > \frac{R_p S_p}{2n+1} > \frac{R_{p'} S_{p'}}{2n+1}$$

si

$$p^2 - p'^2 > 0, \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad p' < p.$$

Par conséquent, parmi les figures de bifurcation du même ordre, correspondant au même n, on rencontrera d'abord celles correspondant à $p = n$, puis successivement les k autres

$$p = n - 2, \qquad p = n - 4, \qquad \ldots, \qquad p = 0 \quad \text{ou} \quad p = 1.$$

On sait en effet que, sur la courbe des Maclaurin, on rencontre d'abord l'ellipsoïde E, qui correspond à $n = 2$ et $p = 2$, puis l'ellipsoïde E_0, de vitesse maximum, au sommet de la courbe, qui correspond à $n = 2$ et $p = 0$.

Si nous considérons des figures d'ordre consécutif, on a

$$n' = n + 1$$

et la condition pour que l'expression ci-dessus reste positive est

$$p'^2 < p^2 + 2(n+1).$$

On ne peut rien dire sur l'ordre des figures qui ne réalisent pas cette condition.

Si l'on considère des figures correspondantes, c'est-à-dire $p' = p + 1$ (comme par exemple $p' = n'$ et $p = n$), on a

$$2p < 2n + 1$$

et la condition est toujours réalisée, car on a $p \leqq n$. Par conséquent, les figures correspondantes, d'ordre différent, seront toujours placées sur la courbe dans l'ordre des n croissants et des aplatissements croissants.

Remarque I. — En étudiant plus haut les cas de dégénérescence avec $a = b$, ellipsoïde de révolution allongé, on a obtenu

$$n(n+1)a^2 + \Pi = p^2(a^2 - c^2),$$

et l'équation de Lamé peut s'écrire, dans ce cas,

$$R'' = [n(n+1)(\rho^2 - a^2) + p^2(a^2 - c^2)]R,$$

où

$$\rho^2 - a^2 > 0, \qquad a^2 - c^2 > 0.$$

L'expression considérée plus haut pour $R''_k R_i - R''_i R_k$ serait toujours positive pour $n' > n$. Or, les ellipsoïdes critiques de Jacobi se rapprochent très rapidement des ellipsoïdes de révolution allongés. De plus, il n'y a qu'un ellipsoïde critique correspondant à chaque valeur de n. On peut donc dire qu'ils seront rencontrés également sur la courbe des Jacobi dans l'ordre des n croissants.

Remarque II. — En traitant le second cas de dégénérescence, c'est-à-dire $b = c$, ellipsoïdes de révolution aplatis, suivant les indications données, on trouve

$$(a^2 + c^2)\frac{d^2 N}{d\tau^2} = [n(n+1)c^2 + \Pi]N,$$

d'où l'on déduit

$$\frac{n(n+1)c^2 + \Pi}{a^2 - c^2} = -p^2$$

au lieu de $+p^2$ dans le premier cas. On en déduit, en remplaçant Π par cette valeur,

$$\frac{d^2 R}{du^2} = [n(n+1)(\rho^2 - c^2) - p^2(a^2 - c^2)]R,$$

c'est bien la même expression que celle indiquée ci-dessus.

Remarque III. — Pour $n = 4$ et $p = 0$, on a la première figure à cannelures. L'ellipsoïde de révolution se creuse suivant deux paral-

lèles symétriques par rapport à l'équateur (*fig.* 38 et 38 *bis*).

Fig. 38.

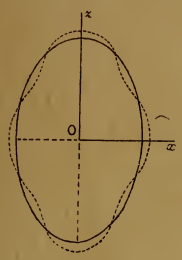
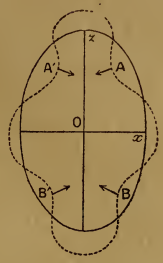


Fig. 38 *bis*.



Si la déformation s'accentue, il se détachera un anneau équatorial, comme dans l'*expérience de Plateau*.

81. **Ellipsoïdes de Jacobi.** — Les ellipsoïdes de bifurcation de Jacobi doivent vérifier les deux conditions suivantes, la première définissant les ellipsoïdes de Jacobi, la seconde définissant les ellipsoïdes de bifurcation (209) :

$$(219) \qquad \frac{R_1 S_1}{3} = \frac{R_4 S_4}{5} \quad \text{et} \quad \frac{R_1 S_1}{3} = \frac{R_k S_k}{2n+1},$$

où il faudra faire $n > 2$ et $k > 8$, d'après l'étude précédente. Ces deux équations détermineront les deux inconnues du problème qui seront les deux rapports d'axes, ou, avec Poincaré, les deux quantités ρ^2 et b^2. Parmi tous les ellipsoïdes homothétiqnes, l'ellipsoïde réel sera déterminé par la valeur du volume. Liapounoff écrivait l'ellipsoïde sous la forme

$$(219') \qquad \frac{x^2}{\rho} + \frac{y^2}{\rho + q} + \frac{z^2}{\rho + 1} = 1,$$

et les deux inconnues ρ et q étaient mises en évidence, mais la forme n'était pas symétrique.

Le système des deux conditions peut se mettre sous la forme

$$(220) \qquad \frac{R_1 S_1}{3} = \frac{R_k S_k}{2n+1}, \qquad \frac{R_4 S_4}{5} = \frac{R_k S_k}{2n+1}.$$

On a déjà vu que si le rapport $\frac{R_k}{R_1}$ varie toujours dans le même sens, c'est-à-dire si R_4 est divisible par R_1, la première équation ne peut pas avoir de racines, ce qui réduit à 4 les 8 formes correspondant à chaque valeur de n.

De même si le rapport $\frac{R_k}{R_4}$ varie toujours dans le même sens, la seconde équation n'aura pas de solution. Il faut donc exclure ces cas parmi les quatre formes acceptables.

Soit *n pair* et la première forme

$$R_k = f(\rho^2).$$

Le polynome $f(\rho^2)$ a toutes ses racines réelles et comprises entre a^2 et c^2. Désignons par α la plus grande racine de $f(\rho^2)$ nous pouvons écrire

$$f(\rho^2) = (\rho^2 - \alpha)(\rho^2 - \alpha_1)(\rho^2 - \alpha_2)\ldots, \qquad R_4 = \sqrt{(\rho^2 - b^2)(\rho^2 - c^2)}$$

et

$$\left(\frac{R_k}{R_4}\right)^2 = \frac{\rho^2 - \alpha}{\rho^2 - b^2}\,\frac{\rho^2 - \alpha}{\rho^2 - c^2}(\rho^2 - \alpha_1)^2\ldots.$$

Or, les deux premiers facteurs sont constamment croissants. L'expression homographique $\frac{\rho^2 - \alpha}{\rho^2 - c^2} = 1 - \frac{\alpha - c^2}{\rho^2 - c^2}$ est constamment croissante, puisque $\alpha > c^2$.

Il en sera de même de $\frac{\rho^2 - \alpha}{\rho^2 - b^2}$, si l'on a $\alpha > b^2$.

Pour que $f(\rho^2)$ convienne, il faut donc que sa plus grande racine soit inférieure à b^2, c'est-à-dire que toutes ses racines doivent être comprises entre b^2 et c^2.

Or, M. Klein a démontré que, parmi les $k+1$ polynomes d'ordre $n = 2k$, il y en a toujours un et un seul dont toutes les racines sont comprises entre b^2 et c^2. Les autres polynomes ont successivement 1, 2, 3, ..., k racines comprises entre a^2 et b^2. On pourra consulter à ce sujet une intéressante Note déjà citée de Stieltjes (*Œuvres complètes*, t. I, ou *Acta mathematica*, t. VI, 1885).

Il y aura donc toujours un polynome $R = f(\rho^2)$, et un seul, qui vérifie l'équation de condition et donne un ellipsoïde de bifurcation.

La seconde forme

$$R = \sqrt{(\rho^2 - b^2)(\rho^2 - c^2)}\, f(\rho^2)$$

donne

$$\frac{R_k}{R_4} = f_1(\rho^2).$$

Ce rapport va toujours en croissant et ce type ne fournit pas de solution.

Soit n *impair*, on a également à considérer deux formes. La première donne

$$\sqrt{\rho^2 - b^2}\, f(\rho^2), \qquad \left(\frac{R_k}{R_4}\right)^2 = \frac{f(\rho^2)^2}{\rho^2 - c^2} = \frac{\rho^2 - \alpha}{\rho^2 - c^2}(\rho^2 - \alpha)(\rho^2 - \alpha_1)^2 \ldots.$$

Mais on a $\alpha > c^2$, la fonction homographique du second membre est toujours croissante et le rapport aussi. Il n'y a pas de solution.

La dernière forme

$$\sqrt{\rho^2 - c^2}\, f(\rho^2)$$

donne

$$\left(\frac{R_k}{R_4}\right)^2 = \frac{f(\rho^2)^2}{\rho^2 - b^2} = \frac{\rho^2 - \alpha}{\rho^2 - b^2}(\rho^2 - \alpha)(\rho^2 - \alpha_1)^2 \ldots.$$

Il faut encore que l'on ait $\alpha < b^2$, c'est-à-dire que toutes les racines de $f(\rho^2)$ soient comprises entre b^2 et c^2. Le théorème de M. Klein établit de même qu'il n'y a qu'une fonction de Lamé remplissant ces conditions.

En résumé, parmi les $2n+1$ fonctions de Lamé d'ordre n, que n soit pair ou impair, *il y a toujours une fonction et une seule telle que* R_k *satisfasse au système* (220) *et donne un ellipsoïde de bifurcation. Il y a toujours un point de bifurcation, et un seul, pour chaque valeur de n.*

Ces conditions sont suffisantes. Si elles sont remplies, il y a nécessairement des solutions. En effet, considérons de nouveau la fonction F dont les racines sont solutions du système (220)

$$F = \frac{R_4 S_4}{5} - \frac{R_k S_k}{2n+1}.$$

Faisons varier b^2 de a^2 à c^2. Pour $b^2 = a^2$, l'équation (1) de (219) donne $\rho^2 = a^2$ et $R_4 S_4 = 0$. Alors on a $F < 0$, car $R_k S_k > 0$. Pour $b^2 = c^2$, on retombe sur le cas des ellipsoïdes de Maclaurin, et l'on a vu (n° 80) que l'on avait alors $F > 0$. L'équation a donc au moins une racine et le système une solution. Liapounoff a

démontré qu'il n'y avait qu'une racine et qu'une solution, dans son Mémoire *Sur la stabilité des figures ellipsoïdales* (1884).

Pour chaque solution du système (220), c'est-à-dire *pour chaque valeur de n, il y aura donc un ellipsoïde critique* et un seul. Nous allons étudier les plus simples.

82. **Étude des figures voisines des Jacobi.** — Pour $n = 1$, il n'y a pas de solution. Pour $n = 2$, nous avons trouvé l'ellipsoïde E, commun aux Maclaurin et aux Jacobi. Nous étudions donc d'abord $n = 3$.

Dans ce cas, n est impair, R_k doit être de la forme

$$R_k = \sqrt{\rho^2 - c^2}(\rho^2 - \alpha), \qquad b^2 < \alpha < c^2.$$

Quelle est la forme de ζ? En remarquant que R_k est une constante sur l'ellipsoïde, nous pouvons l'écrire

$$\frac{\zeta}{l_0} = \frac{\beta}{R_k} R_k M_k N_k = \varepsilon R_k M_k N_k.$$

Nous avons d'ailleurs

$$M_k = \sqrt{\mu^2 - c^2}(\mu^2 - \alpha), \qquad N_k = \sqrt{\nu^2 - c^2}(\nu^2 - \alpha);$$

d'où

$$\frac{\zeta}{l_0} = \varepsilon \sqrt{(\rho^2 - c^2)(\mu^2 - c^2)(\nu^2 - c^2)}(\rho^2 - \alpha)(\mu^2 - \alpha)(\nu^2 - \alpha).$$

Or, le radical est égal à z, le reste donne une expression du second degré d'après (122), et l'on a

$$\frac{\zeta}{l_0} = \varepsilon' z \left(\frac{x^2}{\alpha - a^2} + \frac{y^2}{\alpha - b^2} + \frac{z^2}{\alpha - c^2} - 1\right). \tag{221}$$

Pour avoir le signe de ζ, il suffit de considérer l'intersection de notre ellipsoïde avec le plan $z = 0$, qui le coupe suivant une ellipse principale et avec la surface

$$\frac{x^2}{\alpha - a^2} + \frac{y^2}{\alpha - b^2} + \frac{z^2}{\alpha - c^2} - 1 = 0,$$

qui est un hyperboloïde à deux nappes, car on a $c^2 < \alpha < b^2$ et, par conséquent, $\alpha - a^2 < 0$ et $\alpha - b^2 < 0$. L'intersection de cette quadrique avec Ox et avec Oy n'est pas réelle. L'expression cor-

respondante est négative dans la région de l'origine. Si l'on suppose $\varepsilon' > 0$, ζ sera positif dans la région I, et sera alternativement négatif et positif dans les autres (*fig.* 39).

Fig. 39.

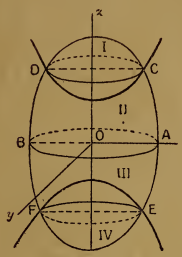
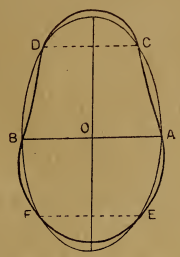


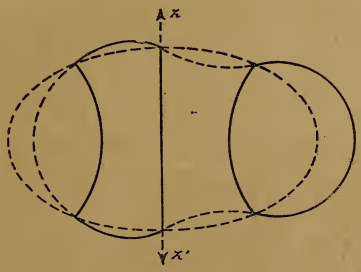
Fig. 39 *bis*.



En traçant la section principale de la figure d'équilibre, on obtient la figure (39 *bis*) que Poincaré appelle *piriforme* et Darwin *pearshaped*. Cette figure n'est pas symétrique par rapport au plan principal xOy qui contient l'axe de rotation Ox, ni par rapport aux autres plans.

Si l'on suppose $\varepsilon' < 0$, les signes de ζ sont intervertis et l'on obtient la figure symétrique de la précédente par rapport au plan zOx.

Fig. 40.



La valeur de α sera donnée par la formule (218), n° 78, où l'on prendra celle des deux racines qui est comprise entre b^2 et c^2.

Nous donnons dans la figure 40 le dessin schématique de Poin-

caré (*Leçons sur les figures d'équilibre*, p. 161). Il y représente en ponctué le contour apparent de l'ellipsoïde, en traits pleins l'intersection de la nouvelle surface avec l'ellipsoïde et le contour apparent de cette surface extérieur à l'ellipsoïde, en ponctué le contour apparent intérieur à l'ellipsoïde. L'intersection de la figure piriforme avec l'ellipsoïde se compose de deux lignes de courbure de la même famille : l'axe de la rotation est désigné par $z'z$. Quand ε change de signe, la surface garde la même forme : les parties gauche et droite s'échangent. M. Jeans a assimilé la forme de l'écorce de la Terre à la figure piriforme, avec des précisions des plus suggestives; mais, comme le dit déjà Poincaré, les résultats obtenus pour les liquides homogènes ne permettent aucune conclusion pour une planète hétérogène.

Calculs pratiques de Darwin. — La figure piriforme a été calculée d'une façon précise par Darwin dans les *Philosophical Transactions*, 1902, A, t. 198. La figure réelle est moins ramassée que celle esquissée par Poincaré. Il n'y a pas d'inflexions pour les sections principales, comme l'a montré P. Humbert [1], même si la figure n'est pas infiniment voisine de celle de l'ellipsoïde.

En prenant pour volume de l'ellipsoïde $T = \frac{4}{3}\pi$, c'est-à-dire en faisant $abc = 1$, on trouve :

1° Pour les demi-axes de l'ellipsoïde de bifurcation,

$$OA = 0{,}65, \qquad OB = 0{,}81, \qquad OC = 1{,}88.$$

2° M et M′ étant les projections sur le plan des xz de l'intersection de la section principale xOz avec l'hyperboloïde à deux nappes, on a

$$\frac{OM}{OC} = 0{,}76.$$

Enfin, la vitesse critique de rotation est

$$\frac{\omega^2}{2\pi f\rho} = 0{,}14.$$

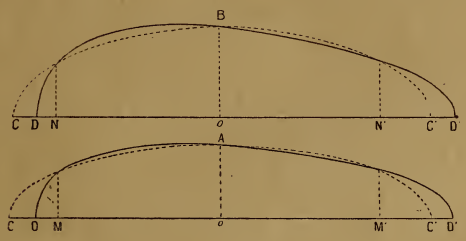
Poincaré et Darwin disent qu'une fois cette déformation com-

[1] *Thèse*, Faculté des Sciences de Paris, 1918.

mencée, si l'on augmente la vitesse de rotation, on peut penser que la concavité continuera à se creuser. La forme en poire irait alors en s'accentuant; un étranglement pourrait se produire, et Darwin suppose qu'on arriverait dans cette voie à la formation d'un satellite.

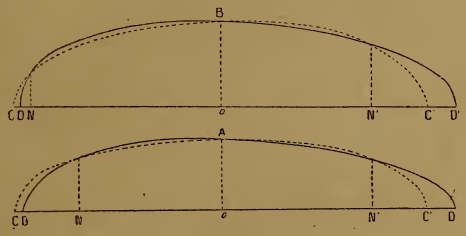
La figure 40 *bis* représente les sections de la figure piriforme et de l'ellipsoïde critique, en première approximation, données par

Fig. 40 *bis*.



Darwin (*Scientific Papers*, p. 314). Darwin a calculé également ce que devenaient les valeurs de ζ et la forme de la figure en seconde approximation. Il obtient la figure 40 *ter* (*Scientific*

Fig. 40 *ter*.



Papers, p. 384), assez différente de la précédente. La déformation aux extrémités du grand axe était la même dans le premier cas. On avait $C'N = CN'$ et $C'D' = CD$. En seconde approximation, la pointe de la figure piriforme s'avance beaucoup plus à droite que la partie renflée ne s'écrase à gauche. On a $C'D' > CD$. Dans

l'ensemble, la figure s'éloigne encore moins de l'ellipsoïde, sauf vers la pointe.

Autres figures d'équilibre. — Pour $n = 4$, la seule forme convenable est

$$R_9 = f(\rho^2) = (\rho^2 - \alpha_1)(\rho^2 - \alpha_2),$$

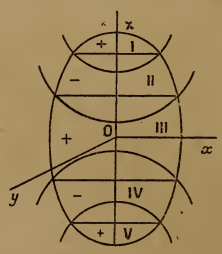
où α_1 et α_2 sont compris entre b^2 et c^2. On a alors

$$(222)\quad \begin{aligned} \zeta &= \varepsilon R_k M_k N_k \\ &= \varepsilon(\rho^2 - \alpha_1)(\mu^2 - \alpha_1)(\nu^2 - \alpha_1)(\rho^2 - \alpha_2)(\mu^2 - \alpha_2)(\nu^2 - \alpha_2) \\ &= \varepsilon'\left(\frac{x^2}{\alpha_1 - a^2} + \frac{y^2}{\alpha_1 - b^2} + \frac{z^2}{\alpha_1 - c^2} - 1\right) \\ &\quad \times \left(\frac{x^2}{\alpha_2 - a^2} + \frac{y^2}{\alpha_2 - b^2} + \frac{z^2}{\alpha_2 - c^2} - 1\right). \end{aligned}$$

Les deux facteurs égalés à o représentent deux hyperboloïdes à deux nappes, et ζ s'annulera sur les courbes d'intersection de l'ellipsoïde avec ces deux hyperboloïdes. Par contre, il ne s'annulera plus dans le plan $z = 0$, car z n'est pas en facteur.

Il est aisé d'esquisser la figure correspondante. Cette figure sera symétrique par rapport au plan des xy. En supposant $\varepsilon' > 0$, le signe de ζ est celui qui est indiqué sur la figure 41. Il y a renfle-

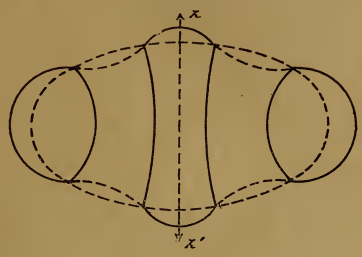
Fig. 41.



ment au milieu et aux deux extrémités, régions I, III et V. En supposant $\varepsilon' < 0$, il faudrait changer le signe de ζ dans chacune des régions. Ainsi il y a deux figures infiniment voisines, et les bosses de l'une correspondent aux étranglements de l'autre. Nous repré-

sentons (*fig.* 41 *bis*) la première surface telle que l'a donnée schématiquement Poincaré dans ses *Leçons*, p. 162. Cette surface

Fig. 41 *bis*.



a été comparée à un *haltère*. Elle est dite positive. Elle est en réalité plus allongée que ne le pensait Poincaré, comme on le verra au numéro suivant.

Ici encore, Darwin pense que si la vitesse de rotation augmentait, les concavités se creuseraient et que la masse donnerait naissance à deux satellites.

Cas général. — Ces deux cas $n = 3$ et $n = 4$ nous fournissent les deux types principaux de figures critiques d'équilibre, qui se retrouvent dans tous les autres.

Lorsque n est impair, la figure n'est pas symétrique par rapport au plan xy et le changement de ε en $-\varepsilon$ donne la même figure, ayant tourné de 180° autour de Ox.

Lorsque n est pair, il y a symétrie par rapport au plan des xy. De plus, les deux figures correspondantes pour $\varepsilon < 0$ et $\varepsilon > 0$ sont distinctes réellement l'une de l'autre.

Il est probable, comme on l'a déjà dit, qu'à chaque valeur de n correspond un seul ellipsoïde critique. On voit que chaque fois que n augmente d'une unité, il s'introduit l'expression d'un nouvel hyperboloïde à deux nappes dans l'expression de ζ et un nouvel étranglement dans la figure d'équilibre.

Remarque. — Pour se rendre compte de ces conclusions, il n'est pas nécessaire de recourir à la considération des hyperboloïdes à

deux nappes. En effet, dans le cas général, on a

$$\rho = \varepsilon R_k M_k N_k$$

avec

$$R_k = f(\rho^2), \qquad M_k = f(\mu^2), \qquad N_k = f(\nu^2)$$

ou

$$R_k = \sqrt{\rho^2 - c^2}\, f(\rho^2), \qquad M_k = \sqrt{\mu^2 - c^2}\, f(\mu^2), \qquad N_k = \sqrt{\nu^2 - c^2}\, f(\nu^2),$$

Or les polynomes f ont leurs racines comprises entre b^2 et c^2. Comme on a

$$c^2 < \nu^2 < b^2 < \mu^2 < a^2 < \rho^2,$$

on voit que N_k seul peut s'annuler. Or, les courbes $\mu =$ const. et $\nu =$ const. représentent les lignes de courbure de l'ellipsoïde, celles des μ entourent le petit axe et celles des ν le grand axe. Enfin, dans le cas où n est impair, parmi les ν on a $\nu^2 = c^2$, qui représente l'ellipse du plan xy.

Nous voyons alors que ζ ne peut s'annuler que pour $N_k = 0$, c'est-à-dire sur les lignes de courbure des ν, racines de $N_k = 0$.

Donc, si n est impair, on aura d'abord sur l'ellipsoïde l'ellipse principale $z = 0$ et en posant $n = 2k + 1$, on aura encore k lignes de courbure au-dessus et k au-dessous qui donneront alternativement des régions avec le signe $+$ et $-$ et l'on aura comme section une courbe ondulée, non symétrique.

Si n est pair, $n = 2k$, il y aura k lignes de courbure au-dessus du plan xy et k au-dessous et symétriques, qui fourniront une figure symétrique par rapport au même plan.

83. Calcul des éléments des ellipsoïdes critiques à trois axes. — Les calculs des éléments des ellipsoïdes de bifurcation et des figures voisines qu'ils engendrent ont été faits d'abord par G. H. Darwin pour la figure piriforme, par une méthode longue et compliquée [1]. Darwin donna pour la première fois la forme exacte de la figure piriforme, qui est plutôt ovoïde et dont les sections principales n'ont pas de points d'inflexion.

---

[1] *Scientific Papers*, p. 188; *Philos. Trans. of the Royal Soc.*, t. 198, A, 1901, p. 301-331.

Liapounoff, dans la troisième partie de son Mémoire [1], a donné une méthode de résolution numérique plus simple et plus pratique. Il a calculé les éléments des figures d'ordre $n = 3$ et $n = 4$ sans donner ces figures elles-mêmes.

P. Humbert a repris la question et étendu les calculs aux figures de Poincaré d'ordre 5 et 6 [2].

Notations. — Pour déterminer les jacobiens critiques, nous avons les deux équations

$$\frac{R_1 S_1}{3} = \frac{R_4 S_4}{5} = \frac{R_k S_k}{2n+1} \tag{223}$$

et nous savons qu'il n'y a qu'une valeur de k pour chaque valeur de n. Ces deux équations pourront servir à déterminer les rapports des trois axes et par conséquent la forme exacte de la figure. En leur adjoignant l'équation qui définit la conservation de la masse ou du volume, on en déterminera les dimensions exactes.

Désignons les axes par A, B, C; on a

$$A^2 = \rho^2 - a^2, \qquad B^2 = \rho^2 - b^2, \qquad C^2 = \rho^2 - c^2, \qquad A < B < C, \tag{224}$$

l'axe des x étant l'axe de rotation.

L'un des quatre paramètres ρ, a, b, c est arbitraire pour définir les trois axes. Poincaré prend $c = 0$, d'où $C = \rho$, ce qui simplifie beaucoup tous les calculs théoriques et pratiques.

En faisant de plus $a = 1$, on réduit les paramètres à deux et les formules auront l'avantage de s'identifier immédiatement avec les formules de dégénérescence, quand on passera aux ellipsoïdes de révolution où $b = c$ et $B = C$.

Liapounoff particularise également deux paramètres en écrivant l'équation de l'ellipsoïde sous la forme (219)

$$\frac{x^2}{\rho} + \frac{y^2}{\rho + q} + \frac{z^2}{\rho + 1} = 1. \tag{225}$$

---

[1] *Sur les figures d'équilibre peu différentes des ellipsoïdes*, Saint-Pétersbourg, 1912.

[2] *Sur les surfaces de Poincaré*, Thèse, 1918.

Les axes sont alors

$$A^2 = \rho, \qquad B^2 = \rho + q, \qquad C^2 = \rho + 1;$$

il est facile de les identifier avec ceux indiqués ci-dessus en prenant

$$A^2 = \rho^2 - 1, \qquad B^2 = \rho^2 - b^2, \qquad C^2 = \rho^2.$$

Darwin, au contraire, introduit l'équation de la masse par la condition $ABC = 1$. Pratiquement, les calculs numériques sont alors beaucoup moins simples qu'avec les notations précédentes. Dans les calculs qui suivent, nous conserverons autant que possible la notation symétrique à quatre paramètres, pour n'introduire les simplifications qu'en dernier lieu.

Solution approchée. — Darwin a remarqué que les ellipsoïdes critiques se rapprochent très vite de la forme d'ellipsoïdes de révolution allongés. On peut en profiter pour trouver une première valeur approchée des axes. Les fonctions R et S deviennent les fonctions adjointes de Legendre de première et de seconde espèce X_n^p et Q_n^p.

Pour les premières de celles-ci, où $n = 1$ et $p = 1$, on a les expressions connues

$$R_1 = 2X_1^1 = \sqrt{r^2 - 1},$$

$$2\frac{S_1}{3} = Q_1^1 = -\frac{r}{\sqrt{r^2-1}} + \frac{1}{2}\sqrt{r^2-1}\,L\frac{r+1}{r-1}.$$

X_1^1 est donné par la formule générale (105), et il suffit de faire $b = a$ dans l'expression générale de S pour retrouver la valeur de Q_1^1. On a

$$R_1 = \sqrt{\rho^2 - a^2}, \qquad D^2 = (\rho^2 - a^2)^2(\rho^2 - c^2),$$

$$S_1 = 3R_1\int_\rho^\infty \frac{\rho\,d\rho}{R_1^2 D} = 3R_1\int_\rho^\infty \frac{\rho\,d\rho}{(\rho^2 - a^2)^2\sqrt{\rho^2 - c^2}}.$$

En posant

$$\rho^2 - a^2 = (\rho^2 - c^2) - (a^2 - c^2) = r^2 - e^2,$$

on obtient

$$\frac{S_1}{3R_1} = \int_r^\infty \frac{dr}{(r^2 - e^2)^2} = \frac{1}{2e^2}\,\frac{r}{r^2 - e^2} - \frac{1}{4e^3}\,L\frac{r+e}{r-e};$$

d'où

$$2\frac{R_1 S_1}{3} = \sqrt{\rho^2 - c^2} - \frac{\rho^2 - a^2}{2(a^2 - c^2)^{\frac{3}{2}}} L \frac{\sqrt{\rho^2 - c^2} + \sqrt{a^2 - c^2}}{\sqrt{\rho^2 - c^2} - \sqrt{a^2 - c^2}}.$$

En introduisant les simplifications $c = 0$ et $a = 1$, on a enfin

$$(226) \qquad 2\frac{R_1 S_1}{3} = \rho - \frac{1}{2}(\rho^2 - 1) L \frac{\rho + 1}{\rho - 1} = 2 X_1^1 Q_1^1.$$

C'est bien la même valeur que celle du produit $X_1^1 Q_1^1$.

La forme unique R_k, correspondant à n, devient un polynome de Legendre X_n^0 ou X_n d'ordre n où $p = 0$. On a de plus, avec les simplifications introduites et $b = a$,

$$D = (\rho^2 - a^2)\sqrt{\rho^2 - c^2} = \rho(\rho^2 - 1).$$

L'expression S_k devient alors

$$\frac{S_k}{2n+1} = R_k \int_\rho^\infty \frac{\rho\, d\rho}{R_k^2 D} = X_n \int_\rho^\infty \frac{d\rho}{X_n^2(\rho^2 - 1)}.$$

C'est bien l'expression de la fonction de Legendre de seconde espèce, qui peut s'écrire, pour $p = 0$,

$$(227) \qquad Q_n = \frac{1}{2} X_n L \frac{\rho + 1}{\rho - 1} - F_{n-1} = \frac{S_k}{2n+1},$$

où F est un polynome de degré $n - 1$, dont on a donné différentes expressions.

Pour $n = 3$ et $n = 4$, on a

$$(228) \quad \begin{cases} R_k = X_3 = \frac{\rho}{2}(5\rho^2 - 3), & F_2 = \frac{1}{6}(15\rho^2 - 4), \\ R_k = X_4 = \frac{1}{8}(35\rho^4 - 30\rho^2 + 3), & F_3 = \frac{5}{24}\rho(21\rho^2 - 11). \end{cases}$$

Dans le premier cas, pour $n = 3$, en portant les expressions ci-dessus dans (223), on obtient pour les valeurs approchées $\rho^2 = 1,227$ au lieu de $1,135$, et avec la condition $ABC = 1$ on a

$$A = B = 0,77, \qquad C = 1,79,$$

alors que les vraies valeurs seront

$$A = 0,65, \qquad B = 0,81, \qquad C = 1,88.$$

Dans le second cas, pour $n = 4$, on obtient $\rho^2 = 1{,}085$ au lieu de $1{,}041$ et

$$A = B = 0{,}65, \qquad C = 2{,}33$$

au lieu de

$$A = 0{,}60, \qquad B = 0{,}69, \qquad C = 2{,}36.$$

Remarque. — D'ailleurs, pour des valeurs assez grandes de n, l'expression $X_n Q_n$ peut s'écrire approximativement d'après les calculs de Laplace

$$(228') \qquad X_n Q_n = -\frac{\cos(2n+1)\theta}{(2n+1)\sqrt{\rho^2-1}}, \qquad \operatorname{ch}\theta = \rho,$$

et les tables des fonctions hyperboliques de l'Institut smithsonien de Washington permettent de résoudre l'équation obtenue.

D'ailleurs, l'équation de condition (223) et la valeur approchée de $R_1 S_1$ dans (226) nous donnent ici

$$X_n Q_n = \frac{R_1 S_1}{3} = X_1^1 Q_1^1 = \text{const.}$$

De plus, pour des valeurs croissantes de n, la valeur de $\rho = \operatorname{ch}\theta$ tend vers 1. Il en est de même du $\cos(2n+1)\theta$ dans $X_n Q_n$. En appliquant alors la formule (228') à deux valeurs successives de n, on obtient la formule de récurrence très simple [1]

$$(2n+3)(\rho_{n+1}^2 - 1) = (2n+1)(\rho_n^2 - 1).$$

Pour $n = 5$ on obtiendra $\rho^2 = 1{,}02899$. On en déduit la valeur $\rho_6^2 = 1{,}0207$, exacte à moins de $0{,}001$ près, puisque la vraie valeur est $1{,}0200$. On aura donc certainement, avec la même approximation,

$$\rho_7^2 = 1{,}015, \qquad \rho_8^2 = 1{,}011, \qquad \frac{C}{A} = \frac{\rho}{\sqrt{\rho^2-1}} = 9{,}60.$$

Pour $n = 8$, le grand axe est déjà près de 10 fois plus allongé que le petit axe.

Valeur approchée de b. — Cette première solution approchée ρ_1, obtenue dans l'hypothèse d'un ellipsoïde de révolution allongé,

---

[1] P. Humbert, *Comptes rendus*, t. 170, 1920, p. 38.

sera portée ensuite dans l'équation des ellipsoïdes à trois axes

$$(229)\qquad F = \frac{R_1 S_1}{3} - \frac{R_4 S_4}{5} = 0$$

qui permettra de déterminer la valeur correspondante de b.

On a ici, en remplaçant ρ par r sous le signe somme,

$$(230)\quad \frac{R_1 S_1}{3} = R_1^2 \int_\rho^\infty \frac{\rho\, d\rho}{R_4^2 D} = (\rho^2 - a^2) \int_\rho^\infty \frac{r\, dr}{(r^2 - a^2) D},$$

$$(230')\quad \frac{R_4 S_4}{5} = R_4^2 \int_\rho^\infty \frac{\rho\, d\rho}{R_4^2 D} = (\rho^2 - b^2)(\rho^2 - c^2) \int_\rho^\infty \frac{r\, dr}{(r^2 - b^2)(r^2 - c^2) D}.$$

Posons

$$r^2 - a^2 = (\rho^2 - a^2)(1 + x)$$

et

$$s = \frac{A^2}{C^2} = \frac{\rho^2 - a^2}{\rho^2 - c^2}, \qquad t = \frac{A^2}{B^2} = \frac{\rho^2 - a^2}{\rho^2 - b^2},$$

il vient

$$\frac{r^2 - b^2}{\rho^2 - a^2} = 1 + x + \frac{a^2 - b^2}{\rho^2 - a^2} = \frac{1 + tx}{t},$$

$$\frac{D^2}{(\rho^2 - a^2)^3} = \frac{(1 + x)(1 + sx)(1 + tx)}{st} = \frac{\Delta^2}{st};$$

$$(231)\quad \frac{R_1 S_1}{3} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{st}{\rho^2 - a^2}} \int_0^\infty \frac{dx}{(1 + x)\Delta}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{st}{\rho^2 - a^2}} \int_0^\infty \frac{(1 + sx)(1 + tx)\, dx}{\Delta^3},$$

$$(231')\quad \frac{R_4 S_4}{5} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{st}{\rho^2 - a^2}} \int_0^\infty \frac{dx}{(1 + sx)(1 + tx)\Delta}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{st}{\rho^2 - a^2}} \int_0^\infty \frac{(1 + x)\, dx}{\Delta^3}.$$

On voit facilement sous cette forme que l'équation (229) $F = 0$ n'est pas autre chose que l'équation $\psi(s, t) = 0$, formule (62'), que nous avons étudiée dans la discussion des ellipsoïdes de Jacobi,

$$\psi(s, t) = (1 - s - t) \int_0^\infty \frac{x\, dx}{\Delta^3} - st \int_0^\infty \frac{x^2\, dx}{\Delta^3} = 0.$$

Pour le calcul numérique il faut développer les intégrales de F

en séries. Pour cela, posons dans les expressions (230)

$$z^2 = \frac{\rho^2 - a^2}{r^2 - a^2} \quad \text{et} \quad \lambda = 1 - t = 1 - \frac{\rho^2 - b^2}{\rho^2 - a^2} = \frac{a^2 - b^2}{\rho^2 - b^2}.$$

Les limites deviennent 0 et 1, on a

$$\frac{r\,dr}{r^2 - a^2} = -\frac{dz}{z},$$

$$r^2 - b^2 = r^2 - a^2 + a^2 - b^2 = (\rho^2 - b^2)\left(\frac{1-\lambda}{z^2} + \lambda\right),$$

$$r^2 - c^2 = \frac{\rho^2 - a^2}{z^2} + (a^2 - c^2),$$

$$\mathrm{D}\,z^3 = \sqrt{\rho^2 - a^2}\sqrt{\rho^2 - b^2}\,\Delta,$$

formules où l'on a

$$\Delta = \sqrt{1 - \lambda(1 - z^2)}\sqrt{\rho^2 - c^2 + (a^2 - c^2)z^2}.$$

Les formules (230) se transforment alors dans les expressions simples suivantes, qui correspondent à celles de Liapounoff :

$$(232) \quad \frac{\mathrm{R}_1\mathrm{S}_1}{3} = \sqrt{1-\lambda}\int_0^1 \frac{z^2\,dz}{\Delta}, \qquad \frac{\mathrm{R}_4\mathrm{S}_4}{5} = (\rho^2 - c^2)\sqrt{1-\lambda}\int_0^1 \frac{z^4\,dz}{\Delta^3}.$$

En les développant suivant les puissances de λ, on obtient

$$(233) \quad \begin{cases} \dfrac{\mathrm{R}_1\mathrm{S}_1}{3}\,\dfrac{\mathrm{D}}{\rho^2 - a^2} = a_0 + \dfrac{1}{2}a_1\lambda + \dfrac{1.3}{2.4}a_2\lambda^2 + \dfrac{1.3.5}{2.4.6}a_3\lambda^3 + \ldots, \\[2ex] \dfrac{\mathrm{R}_4\mathrm{S}_4}{5}\,\dfrac{\mathrm{D}}{\rho^2 - a^2} = b_0 + \dfrac{3}{2}b_1\lambda + \dfrac{3.5}{2.4}b_2\lambda^2 + \dfrac{3.5.7}{2.4.6}b_3\lambda^3 + \ldots \end{cases}$$

avec

$$a_0 = \frac{1}{2}(\rho^2 - c^2) - \frac{1}{2}\sqrt{(\rho^2 - a^2)(\rho^2 - b^2)}\,\mathrm{L}\frac{1 + \sqrt{\rho^2 - c^2}}{\sqrt{\rho^2 - a^2}},$$

$$b_0 = (\rho^2 - c^2)(3a_0 - 1),$$

et les formules de récurrence

$$(2n+4)a_{n+1} = (2n+1)a_n + b_n,$$
$$b_{n+1} = (\rho^2 - c^2)[(2n+5)a_{n+1} - (2n+2)a_n].$$

Si l'on fait maintenant pour simplifier $c = 0$ et $a = 1$, il vient d'après (226)

$$a_0 = \frac{\rho}{2}\left(\rho - \sqrt{\rho^2 - 1}\,\mathrm{L}\sqrt{\frac{\rho+1}{\rho-1}}\right) = \rho\,\mathrm{X}\,|\,\mathrm{Q}\,|,$$

$$b_0 = \rho^2(3a_0 - 1).$$

Ces valeurs portées dans l'expression (223) et dans l'équation $F = 0$ donneront une série, suivant les puissances croissantes de λ, qui permettra de déduire la valeur λ_1 correspondant à la valeur approchée de ρ_1. L'expression F peut s'écrire

$$\lambda = \frac{a_0 - b_0}{f(\lambda)},$$

et comme $f(\lambda)$ est une fonction croissante, la valeur approchée λ_1 sera toujours comprise entre un nombre arbitraire $\lambda_0 < 1$ et

$$\frac{b_0 - b_0}{f(\lambda_0)},$$

ce qui permet de déterminer rapidement la racine λ_1, qui donnera ensuite b_1 :

$$\lambda = \frac{a^2 - b^2}{\rho^2 - b^2} = \frac{1 - b^2}{\rho^2 - b^2}, \qquad b^2 = \frac{a^2 - \lambda\rho^2}{1 - \lambda} = \frac{1 - \lambda\rho^2}{1 - \lambda}.$$

Remarque I. — On aurait pu obtenir les formules (232) en posant dans les formules (231)

$$z^2 = \frac{1}{1 + x} \qquad \text{et} \qquad \lambda = 1 - t,$$

et remplaçant s par sa valeur en ρ^2. On voit ainsi qu'on a développé simplement les intégrales de l'équation $\psi(s, t) = 0$ suivant les puissances croissantes de $1 - t < 1$.

Remarque II. — Liapounoff, qui a donné ce développement, écrivait dans sa notation

$$\frac{R_1 S_1}{3} = \frac{1}{3} E_{1,0} F_{1,0} = R = \frac{1}{2} \rho \int_\rho^\infty \frac{dt}{t\,\Delta(t)}, \qquad \Delta(t) = \sqrt{t(t+q)(t+1)},$$

$$\frac{R_4 S_4}{5} = \frac{1}{5} E_{2,3} F_{2,3} = Q = \frac{1}{2}(\rho + 1)(\rho + q) \int_\rho^\infty \frac{dt}{(t+q)(t+1)\Delta(t)}.$$

Il pose ensuite

$$z^2 = \frac{\rho}{t} \qquad \text{et} \qquad \lambda = \frac{q}{\rho + q},$$

et il obtient les expressions (232) sous la forme

$$(234)\quad \begin{cases} R\sqrt{\dfrac{\rho+q}{\rho}} = \displaystyle\int_0^1 \frac{z^2\,dz}{\sqrt{1-\lambda(1-z^2)}\sqrt{\rho+z^2}}, \\ Q\sqrt{\dfrac{\rho+q}{\rho}} = (\rho+1)\displaystyle\int_0^1 \frac{z^4\,dz}{[1-\lambda(1-z^2)]^{\frac{3}{2}}(\rho+z^2)^{\frac{3}{2}}}. \end{cases}$$

Détermination des valeurs exactes de ρ et b. — Ces valeurs approchées ρ_1 et b_1 sont portées dans la seconde équation de condition

$$(235)\qquad G = \frac{R_1 S_1}{3} - \frac{R_k S_k}{2n+1} = \frac{R_1 S_1}{3} - \frac{R_n S_n}{2n+1}.$$

Nous pouvons écrire ici R_n et S_n parce qu'il n'y a qu'une seule fonction R d'ordre n qui convienne.

Ces valeurs de ρ et b ne vérifieront pas exactement cette équation et donneront $G > 0$ par exemple. On essaiera une autre valeur voisine ρ_2 qui donne $G < 0$, après avoir déterminé la valeur correspondante b_2 au moyen du calcul précédent. On aura alors pour la valeur exacte $\rho_1 < \rho < \rho_2$ si $\rho_1 < \rho_2$. On pourra ensuite recommencer les calculs et resserrer autant qu'on voudra les limites entre lesquelles se trouve comprise la valeur exacte.

L'expression G (235) a été appelée par Poincaré *coefficient de stabilité* de l'ordre n. Nous en verrons la raison au chapitre suivant :

En transformant la fonction de Lamé de seconde espèce S_n, Liapounoff arrive à écrire l'expression G sous la forme

$$(236)\qquad \frac{D}{\rho}\frac{R_1 S_1}{3} - J = \frac{D}{\rho}\left(\frac{R_1 S_1}{3} - \frac{\rho J}{D}\right),$$

où $\frac{\rho J}{D}$ joue le même rôle que $\frac{R_n S_n}{2n+1}$; mais l'expression qu'il donne pour J est extrêmement compliquée et conduit à des calculs très laborieux.

M. P. Humbert arrive à des formules plus simples. L'expression G peut s'écrire alors

$$(237)\quad -G = \frac{1}{2}R_n^2\left(2\frac{R_1 S_1}{3}DP' + P\right) = R_n^2 DP'\left(\frac{R_1 S_1}{3} + \frac{P}{2DP'}\right) = 0.$$

Si l'on pose

$$(238)\qquad H = DP = K(\rho^2) + \frac{1}{2}K(a^2) = K(\rho^2) + \frac{1}{2}K(1),$$

on obtient

$$(239)\qquad \frac{2n+1}{R_n S_n} = -2\frac{DP'}{P} = 2D\left(\frac{D'}{D} - \frac{H'}{H}\right) = \frac{D}{\rho J},$$

où

$$D^2 = (\rho^2 - a^2)(\rho^2 - b^2)(\rho^2 - c^2) = \rho(\rho + q)(\rho + 1),$$

les dérivées étant prises par rapport à ρ^2, ou par rapport à ρ dans la notation de Liapounoff.

L'expression $R_n S_n$ est exprimée au moyen de la seule fonction H, qui exprime la valeur de l'intégrale S_n pour la valeur particulière correspondant aux ellipsoïdes critiques de Jacobi.

La fonction K dans H peut d'ailleurs s'écrire

$$(240)\qquad K(\rho^2) = \sum_{\alpha_i}^{\alpha_k} \frac{1}{\rho^2 - \alpha_i}\frac{1}{R'^2(\alpha_i)},$$

où $R'(\alpha_i)$ est la dérivée de R_n par rapport à ρ^2, où l'on a fait ensuite $\rho^2 = \alpha_i$. Pour n pair, $n = 2k$, on a

$$(241)\qquad R_n = (\rho^2 - \alpha_1)(\rho^2 - \alpha_2)\ldots(\rho^2 - \alpha_k)$$

et

$$R_n = \sqrt{\rho^2 - c^2}(\rho^2 - \alpha_1)(\rho^2 - \alpha_2)\ldots(\rho^2 - \alpha_k),$$

pour n impair, $n = 2k + 1$, où l'on peut faire $c = 0$.

On aura alors

$$(242)\qquad \left\{\begin{aligned} H &= \sum_{\alpha_i}^{\alpha_k} \frac{1}{\rho^2 - \alpha_i}\frac{1}{R'^2(\alpha_i)} + \frac{1}{2}\sum_{\alpha_i}^{\alpha_k}\frac{1}{1-\alpha_i}\frac{1}{R'^2(\alpha_i)} \\ &= \sum_{\alpha_i}^{\alpha_k}\frac{\rho^2 + 2 - 3\alpha_i}{2(\rho^2 - \alpha_i)(1-\alpha_i)}\frac{1}{R'^2(\alpha_i)}, \\ H' &= -\sum_{\alpha_i}^{\alpha_k}\frac{1}{(\rho^2 - \alpha_i)^2}\frac{1}{R'^2(\alpha_i)}. \end{aligned}\right.$$

Il suffira donc de déterminer les racines α_i de R_n pour obtenir H et la valeur correspondante de S_n.

Remarque. — Liapounoff et M. P. Humbert donnent des formules différentes pour le cas de n pair ou impair. Mais les expres-

sions plus compliquées données par M. P. Humbert pour n impair peuvent s'écrire simplement

$$(240') \qquad K(\rho^2) = \sum_{\alpha_i}^{\alpha_k} = \frac{1}{\rho^2 - \alpha_i} \frac{1}{\alpha_i T'^2(\alpha_i)},$$

en posant

$$R_n = \sqrt{\rho^2 - c^2}(\rho^2 - \alpha_1)\ldots(\rho^2 - \alpha_k) = \sqrt{\rho^2 - c^2}\, T_{n-1}.$$

On obtient alors, en prenant les dérivées par rapport à ρ^2

$$R' = \frac{1}{2\sqrt{\rho^2 - c^2}} T + \sqrt{\rho^2 - c^2}\, T';$$

en faisant ensuite $\rho^2 = \alpha_i$ et $c = 0$, il vient

$$T = 0 \qquad \text{et} \qquad \alpha_i T'^2(\alpha_i) = R'^2(\alpha_i).$$

La formule (240') est bien donnée par la formule générale (240).

Figure piriforme ou ovoïde $n = 3$. — On a, en faisant $c = 0$,

$$R = \sqrt{\rho^2 - c^2}(\rho^2 - \alpha) = \rho(\rho^2 - \alpha).$$

L'équation différentielle qui détermine R peut s'écrire, H étant ici une constante,

$$(243) \qquad A \frac{d}{d\rho}\left(A \frac{dR}{d\rho}\right) = A^2 R'' + AA'R' = [n(n+1)\rho^2 + H]R,$$

avec

$$(244) \quad A = \frac{D}{\rho}, \quad D^2 = (\rho^2 - a^2)(\rho^2 - b^2)(\rho^2 - c^2) = \rho^2(\rho^2 - a^2)(\rho^2 - b^2),$$

$$A^2 = (\rho^2 - a^2)(\rho^2 - b^2), \qquad AA' = \frac{1}{2}(A^2)' = 2\rho^3 - (a^2 + b^2)\rho.$$

On a

$$R' = 3\rho^2 - \alpha, \qquad R'' = 6\rho.$$

Ces valeurs doivent vérifier identiquement l'équation différentielle ci-dessus quel que soit ρ. En égalant à zéro les coefficients de ρ^2 et le terme constant, on obtient

$$H = 10\alpha - 9(a^2 + b^2), \qquad -\alpha H = \alpha(a^2 + b^2) + 6a^2 b^2,$$

d'où l'équation qui donne α

$$(245) \qquad 5\alpha^2 - 4(a^2 + b^2)\alpha + 3a^2 b^2 = 0.$$

On peut obtenir plus simplement cette expression en remarquant que l'expression (221) du numéro précédent, qui donne la valeur de la déformation ζ de l'ellipsoïde, est un produit de Lamé, qui doit vérifier l'équation de Laplace $\Delta V = 0$

$$(246) \qquad V = \frac{\zeta}{zl} = z\left(\frac{x^2}{\alpha - a^2} + \frac{y^2}{\alpha - b^2} + \frac{z^2}{\alpha - c^2} - 1\right),$$

$$\Delta V = 2z\left(\frac{1}{\alpha - a^2} + \frac{1}{\alpha - b^2} + \frac{3}{\alpha - c^2}\right) = 0.$$

En annulant le crochet, il vient

$$5\alpha^2 - 2(2a^2 + 2b^2 + c^2)\alpha + 3a^2 + b^2 + a^2c^2 + b^2c^2 = 0.$$

En faisant $c = 0$ on retrouve l'expression (245). En faisant enfin $a = 1$, on a

$$(245') \qquad 5\alpha^2 - 4(1 + b^2)\alpha + 3b^2 = 0.$$

Cette expression donnera une valeur approchée α_1 de α en fonction de la valeur approchée b_1 trouvée plus haut.

On a ensuite, en remarquant que l'expression $R'(\alpha)$ de $K(\rho^2)$, formule (240), est la dérivée de R par rapport à ρ^2, où l'on a fait $\rho^2 = \alpha$,

$$R' = \frac{dR}{d\rho^2} = \frac{dR}{2\rho\, d\rho} = \frac{3\rho^2 - \alpha}{2\rho},$$

d'où

$$R'^2(\alpha) = \alpha, \qquad K(\rho^2) = \frac{1}{\alpha(\rho^2 - \alpha)},$$

$$H = \frac{1}{\alpha(\rho^2 - \alpha)} + \frac{1}{2\alpha(1 - \alpha)}, \qquad H' = -\frac{1}{\alpha(\rho^2 - \alpha)^2}.$$

On a donc

$$\frac{H'}{H} = -\frac{2(1 - \alpha)}{(\rho^2 - \alpha)(\rho^2 + 2 - 3\alpha)}.$$

On obtient encore

$$\frac{(D^2)'}{D^2} = 2\frac{D'}{D} = \frac{1}{\rho^2 - a^2} + \frac{1}{\rho^2 - b^2} + \frac{1}{\rho^2 - c^2} = \frac{1}{\rho^2 - 1} + \frac{1}{\rho^2 - b^2} + \frac{1}{\rho^2},$$

d'où, pour l'expression qui donne RS,

$$(248) \quad \frac{7}{RS} = D\left\{\frac{1}{\rho^2 - 1} + \frac{1}{\rho^2 - b^2} + \frac{1}{\rho^2} + \frac{4(1 - \alpha)}{(\rho^2 - \alpha)(\rho^2 + 2 - 3\alpha)}\right\}.$$

Ces expressions portées dans (239) permettront de calculer une première valeur de G, correspondant à ρ_1, b_1 et α_1.

Remarque. — Liapounoff dans sa notation écrit

$$R = E = \sqrt{\rho + 1}(\rho + h),$$

$\rho^2 - c^2$ ou ρ^2 est remplacé par $\rho + 1$. Pour identifier avec l'expression de R en α, il faut remplacer ici ρ par $\rho^2 - 1$. On aura

$$\rho + h = \rho^2 - 1 + h = \rho^2 - \alpha, \qquad \alpha = 1 - h.$$

Cette formule donne la valeur des expressions h de Liapounoff en fonction des racines α de R. On obtient alors

$$(249) \qquad \frac{1}{\rho J} = \frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho + q} + \frac{1}{\rho + 1} + \frac{4h}{(\rho + h)(\rho + 3h)}.$$

C'est l'expression donnée par Liapounoff pour la fonction J qui remplace $R_n S_n$, sauf qu'il la donne sous la forme compliquée J au lieu de cette forme plus simple $\frac{1}{J}$.

Par des approximations successives il a obtenu

$$0,135165 < \rho < 0,135170,$$
$$0,076908 < q < 0,076913,$$

ce qui correspond dans la notation de Poincaré à

$$\begin{aligned} 1,135165 &< \rho^2 < 1,135170 \\ 0,923087 &< b^2 < 0,923092 \end{aligned} \qquad (b^2 = 1 - q).$$

On peut prendre pour valeurs exactes $b^2 = 0,9231$ et pour les axes

$$\rho^2 = 1,1352. \qquad \rho^2 - b^2 = 0,2121, \qquad \rho^2 - 1 = 0,1352.$$

On en déduit au moyen de (245′) la valeur

$$\alpha = 0,5745.$$

Les éléments de l'ellipsoïde de bifurcation, qui conduit à la figure piriforme, seront

$$s = \frac{A^2}{C^2} = 0,1189, \qquad t = \frac{A^2}{B^2} = 0,6361,$$

ou, en prenant le grand axe C comme unité, les valeurs des deux

autres axes sont

$$\frac{A}{C} = 0,3451, \qquad \frac{B}{C} = 0,4323.$$

Cet ellipsoïde de bifurcation est déjà très allongé, puisque l'axe de rotation n'est que le tiers du grand axe et l'axe moyen moins de la moitié du même axe.

En introduisant la condition de Darwin relative au volume, $ABC = 1$, les nombres de Liapounoff donnent, avec quatre décimales exactes,

$$A = 0,6507, \qquad B = 0,8150, \qquad C = 1,8856.$$

Les calculs de Darwin donnent les mêmes nombres, qui ne diffèrent que par la quatrième décimale dans $C = 1,8858$.

Détermination du second ellipsoïde de bifurcation $n = 4$. — On a

$$R_n = (\rho^2 - \alpha_1)(\rho^2 - \alpha_2). \tag{250}$$

Comme il n'y a pas de radical, il sera plus simple ici de prendre les dérivées par rapport à ρ^2. On peut alors simplifier l'équation différentielle de R (243) en remplaçant A par $\frac{D}{\rho}$. On pourra écrire

$$D\frac{d}{\rho\, d\rho}\left(D\frac{dR}{\rho\, d\rho}\right) = 4D^2R'' + 2(D^2)'R' = [n(n+1)\rho^2 + H]R, \tag{251}$$

les dérivées étant prises par rapport à ρ^2. Il vient alors

$$D^2 = (\rho^2 - a^2)(\rho^2 - b^2)(\rho^2 - c^2) = \rho^6 - S\rho^4 + P\rho^2 - Q,$$
$$(D^2)' = 3\rho^4 - 2S\rho^2 + P,$$

en posant

$$S = a^2 + b^2 + c^2, \qquad P = a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2, \qquad R = a^2b^2c^2.$$

On a ensuite

$$\left\{\begin{aligned} R_n &= \rho^4 - (\alpha_1 + \alpha_2)\rho^2 + \alpha_1\alpha_2 = \rho^4 - s\rho^2 + r, \\ R'_n &= 2\rho^2 - (\alpha_1 + \alpha_2) = 1\rho^2 - s, \qquad R'' = 2, \end{aligned}\right. \tag{252}$$
$$s = \alpha_1 + \alpha_2, \qquad r = \alpha_1\alpha_2.$$

L'équation différentielle (251) devient

$$8(\rho^6 - S\rho^4 + P\rho^2 - Q) + 2(3\rho^4 - 2S\rho^2 + P)(2\rho^2 - s)$$
$$= (20\rho^2 + H)(\rho^4 - s\rho^2 + r).$$

En annulant successivement les coefficients de ρ^4, ρ^2 et le terme constant, on obtient

$$(253)\qquad \begin{cases} \mathrm{H} = 14\,s - 16\,\mathrm{S}, \\ s\mathrm{H} = 20\,r - 4\,\mathrm{S}\,s - 12\,\mathrm{P}, \\ r\mathrm{H} = -2\,\mathrm{P}\,s - 8\,\mathrm{Q}; \end{cases}$$

$$(253')\qquad \begin{cases} (7s - 8\mathrm{S})r = -(\mathrm{P}s + 4\mathrm{Q}), \\ 7s^2 - 6\mathrm{S}\,s = 10\,r - 6\mathrm{P}. \end{cases}$$

L'élimination de H et de r donne la valeur de s par une équation du troisième degré

$$(254)\qquad 49s^3 - 98\,\mathrm{S}\,s^2 + 4(12\,\mathrm{S}^2 + 13\,\mathrm{P})s + 8(5\,\mathrm{Q} - 6\,\mathrm{PS}) = 0.$$

Pour les calculs numériques on fait ici $c = 0$ et $a = 1$, d'où

$$\mathrm{S} = 1 + b^2, \qquad \mathrm{P} = b^2, \qquad \mathrm{Q} = 0;$$

$$(254')\qquad 49s^3 - 98(1 + b^2)s^2 + 4(12 + 37b^2 + 12b^4)s - 48b^2(1 + b^2) = 0.$$

Cette équation détermine s, connaissant b, puis l'une des équations (253') détermine r. On obtient ainsi les racines α_1 et α_2 de R_n.

La solution approchée doit être portée dans l'expression G. Il faut déterminer $\mathrm{R}_n\mathrm{S}_n$, c'est-à-dire H. On a ici successivement

$$\mathrm{R}'(\alpha_1) = -\mathrm{R}'(\alpha_2) = \alpha_1 - \alpha_2, \qquad \mathrm{R}'^2(\alpha_i) = (\alpha_1 - \alpha_2)^2 = s^2 - 4r,$$

$$\mathrm{K}(\rho^2) = \frac{1}{(\alpha_1 - \alpha_2)^2}\left(\frac{1}{\rho^2 - \alpha_1} + \frac{1}{\rho^2 - \alpha_2}\right) = \frac{1}{(\alpha_1 - \alpha_2)^2}\,\frac{\mathrm{R}'}{\mathrm{R}}.$$

On tire de ces formules les valeurs de H et H' ($\mathrm{R}'' = 2$) :

$$\mathrm{H} = \frac{1}{(\alpha_1 - \alpha_2)^2}\left(\frac{\mathrm{R}'}{\mathrm{R}} + \frac{1}{2}\,\frac{\mathrm{R}'_1}{\mathrm{R}_1}\right),$$

$$\mathrm{H}' = \frac{2\,\mathrm{R} - \mathrm{R}'^2}{(\alpha_1 - \alpha_2)^2\,\mathrm{R}^2}, \qquad \frac{\mathrm{H}'}{\mathrm{H}} = \frac{2\,\mathrm{R}_1}{\mathrm{R}}\,\frac{2\,\mathrm{R} - \mathrm{R}'^2}{2\,\mathrm{R}_1\mathrm{R}' - \mathrm{R}\mathrm{R}'^2},$$

où R_1 et R'_1 sont les valeurs de R et R' quand on y fait $\rho^2 = a^2 = 1$:

$$\mathrm{R}_1 = (1 - \alpha_2)(1 - \alpha_1), \qquad \mathrm{R}'_1 = 2 - (\alpha_1 + \alpha_2).$$

Dans la notation de Liapounoff, on a

$$(245)\qquad \begin{cases} \mathrm{R}_n = (\rho + h_1)(\rho + h_2), \\ s' = h_1 + h_2 = 1 - \alpha_1 + 1 - \alpha_2 = \mathrm{R}'_1, \\ r' = h_1 h_2 = (1 - \alpha_1)(1 - \alpha_2) = \mathrm{R}_1. \end{cases}$$

On obtient alors la formule ci-dessus de H, où R_1 et R'_1 sont remplacés par r' et s'.

Le signe de G permettra de déterminer une autre valeur ρ_2 de ρ de manière à avoir $\rho_1 < \rho < \rho_2$ et ainsi de suite. On calculera de même des valeurs de plus en plus approchées de b, de s et de r. Liapounoff trouve ainsi, avec ses notations,

$$0,0709 < \rho < 0,0710, \qquad 1,15340 < s' < 1,15343,$$
$$0,02355 < q < 0,02362, \qquad 0,23702 < r' < 0,23705.$$

Nous pouvons prendre les valeurs

$$\rho = 0,0710, \qquad q = 0,0236, \qquad s' = 1,1534, \qquad r' = 0,2370.$$

On obtient, avec les notations de Poincaré,

$$b^2 = 1 - q = 0,9764, \qquad \rho^2 = 1,0710,$$
$$\rho^2 - 1 = 0,0710, \qquad \rho^2 - b^2 = 0,0946,$$
$$\alpha_1 + \alpha_2 = 0,8466, \qquad \alpha_1\alpha_2 = 0,0836,$$
$$\alpha_1 = 0,1142, \qquad \alpha_2 = 0,7324.$$

On a alors, pour les axes de l'ellipsoïde de bifurcation rapportés au grand axe,

$$\frac{A}{C} = 0,2575, \qquad \frac{B}{C} = 0,2970.$$

Le petit axe n'est que le quart du grand axe et l'axe moyen n'en est que les trois dixièmes.

Remarque. — L'expression différentielle (251) qui détermine R peut s'écrire, si l'on fait $\rho^2 = \alpha_i$, d'où $R = 0$, les dérivées étant prises par rapport à ρ^2,

$$(256) \qquad 2D^2R'' + (D^2)'R' = 0, \qquad \frac{D'(\alpha_i)}{D(\alpha_i)} + \frac{R''(\alpha_i)}{R'(\alpha_i)} = 0,$$

et l'on aura autant d'équations que de racines α dans R pour les déterminer, c'est-à-dire k. On voit facilement que l'expression ci-dessus peut s'écrire pour n pair, $n = 2k$,

$$(257) \quad \frac{1}{\alpha_i - a^2} + \frac{1}{\alpha_i - b^2} + \frac{1}{\alpha_i - c^2} + 4\sum_{\alpha_j=1}^{\alpha_j=\alpha_k} \frac{1}{\alpha_i - \alpha_j} = 0 \qquad (\alpha_j \neq \alpha_i),$$

où j prend toutes les valeurs de 1 à k, sauf α_i.

Pour n impair, $n = 2k + 1$, en mettant R sous la forme

$$R_n = \sqrt{\rho^2 - c^2}(\rho^2 - \alpha_1)\ldots(\rho^2 - \alpha_k) = \sqrt{\rho^2 - c^2}\,T_{n-1}$$

et dérivant par rapport à ρ^2, on obtient

$$R' = \frac{1}{2\sqrt{\rho^2 - c^2}}T + \sqrt{\rho^2 - c^2}\,T',$$

$$R'' = -\frac{1}{4(\rho^2 - c^2)^{\frac{3}{2}}}T + \frac{1}{\sqrt{\rho^2 - c^2}}T' + \sqrt[4]{\rho^2 - c^2}\,T''.$$

En faisant alors $\rho^2 = \alpha_i$, d'où $T = 0$, il vient

$$\frac{R''(\alpha_i)}{R'(\alpha_i)} = \frac{1}{\alpha_i - c^2} + \frac{T''(\alpha_i)}{T'(\alpha_i)}$$

et l'expression (256) peut s'écrire

$$\frac{1}{\alpha_i - a^2} + \frac{1}{\alpha_i - b^2} + \frac{3}{\alpha_i - c^2} + 4\sum_{\alpha_j = 1}^{\alpha_j = \alpha_k}\frac{1}{\alpha_i - \alpha_j} = 0 \qquad (\alpha_j \neq \alpha_i).$$

On voit facilement que toutes les expressions calculées sont de cette forme.

Calcul de l'ellipsoïde critique $n = 5$. — On a

$$R_n = \sqrt{\rho^2 - c^2}(\rho^2 - \alpha_1)(\rho^2 - \alpha_2) = \rho(\rho^2 - \alpha_1)(\rho^2 - \alpha_2).$$

Les équations qui déterminent α_1 et α_2 sont alors

$$\frac{1}{\alpha_1 - a^2} + \frac{1}{\alpha_1 - b^2} + \frac{3}{\alpha_1 - c^2} + \frac{4}{\alpha_1 - \alpha_2} = 0,$$

$$\frac{1}{\alpha_2 - a^2} + \frac{1}{\alpha_2 - b^2} + \frac{3}{\alpha_2 - c^2} + \frac{4}{\alpha_2 - \alpha_1} = 0,$$

où l'on fera $c = 0$ et $a = 1$.

La dérivée de R par rapport à ρ^2, où l'on fait $\rho^2 = \alpha_i$, donne

$$R'^2(\alpha_i) = (\alpha_i - c^2)\,T'^2(\alpha_i) = (\alpha_i - c^2)(\alpha_1 - \alpha_2)^2.$$

On peut faire maintenant $c = 0$, on a

$$R'^2(\alpha_1) = \alpha_1(\alpha_1 - \alpha_2)^2, \qquad R'^2(\alpha_2) = \alpha_2(\alpha_1 - \alpha_2)^2,$$

$$(258) \qquad K(\rho^2) = \frac{1}{(\alpha_1 - \alpha_2)^2}\left[\frac{1}{\alpha_1(\rho^2 - \alpha_1)} + \frac{1}{\alpha_2(\rho^2 - \alpha_2)}\right].$$

On déduira de là H et H', puis $R_n S_n$. En repassant aux notations de Liapounoff on retrouve les expressions données par M. P. Humbert. On en déduit les valeurs

$$\rho^2 = 1,0290, \qquad b^2 = 0,9953, \tag{259}$$

$$\alpha_1 = 0,4539, \qquad \alpha_2 = 0,6545, \tag{260}$$

$$\frac{A}{C} = 0,1678, \qquad \frac{B}{C} = 0,1810. \tag{261}$$

Le grand axe est plus de six fois plus grand que les deux autres. L'ellipsoïde critique est très allongé.

Pour l'ellipsoïde critique $n = 6$, on a

$$R_n = (\rho^2 - \alpha_1)(\rho^2 - \alpha_2)(\rho^2 - \alpha_3), \tag{262}$$

$$\frac{1}{\alpha_1 - a^2} + \frac{1}{\alpha_1 - b^2} + \frac{1}{\alpha_1 - c^2} + \frac{4}{\alpha_1 - \alpha_2} + \frac{4}{\alpha_1 - \alpha_3} = 0 \tag{263}$$

et deux équations analogues pour α_2 et α_2. On a ensuite

$$R' = (\rho^2 - \alpha_1)(\rho^2 - \alpha_2) + (\rho^2 - \alpha_2)(\rho^2 - \alpha_3) + (\rho^2 - \alpha_1))\rho^2 - \alpha_3), \tag{264}$$

$$\begin{aligned} K(\rho^2) = {} & \frac{1}{\rho^2 - \alpha_1} \frac{1}{(\alpha_1 - \alpha_2)^2 (\alpha_1 - \alpha_3)^2} \\ & + \frac{1}{\rho^2 - \alpha_2} \frac{1}{(\alpha_2 - \alpha_1)^2 (\alpha_2 - \alpha_3)^2} + \frac{1}{\rho^2 - \alpha_3} \frac{1}{(\alpha_3 - \alpha_1)^2 (\alpha_3 - \alpha_2)^2}; \end{aligned} \tag{265}$$

On forme H puis RS et l'on obtient

$$\begin{gathered} \rho^2 = 1,020, \qquad b^2 = 0,9976, \\ \alpha_1 = 0,080, \qquad \alpha_2 = 0,423, \qquad \alpha_3 = 0,869, \\ \frac{A}{C} = 0,140, \qquad \frac{B}{C} = 0,148. \end{gathered} \tag{266}$$

Les valeurs des axes A et B sont presque les mêmes et l'ellipsoïde est très voisin d'un ellipsoïde de révolution allongé.

Remarque. — M. M. Orlow, dans un Mémoire présenté à l'Académie de l'Ukraine, donne des formules de calcul plus rapides en appliquant la méthode et les notations de Liapounoff. Il calcule les ρ^2 pour les ellipsoïdes $n = 5$, 6 et 7, mais trouve des valeurs assez différentes de celles de M. P. Humbert : 1,0443 pour $n = 5$ et 1,0305 pour $n = 6$, enfin 1,0224 pour $n = 7$. Il a déterminé en même temps, pour ces trois valeurs de n, la forme des ellipsoïdes

critiques et des figures de bifurcation. Elles sont données dans les figures 44, a, b, c, d.

84. Détermination de la forme des figures dérivées. — Les dimensions et les éléments des ellipsoïdes critiques étant déterminés, l'épaisseur de la couche de déformation infiniment petite sera donnée en chaque point par la formule générale

$$\zeta = \varepsilon' l M_k N_k = \varepsilon l R_k M_k N_k. \tag{267}$$

l et les fonctions de Lamé prennent les valeurs qu'elles ont sur l'ellipsoïde critique de coordonnées x, y, z. On a pour l

$$\frac{1}{l^2} = \frac{x^2}{A^4} + \frac{y^2}{B^4} + \frac{z^2}{C^4} = \frac{x^2}{(\rho^2 - a^2)^2} + \frac{y^2}{(\rho^2 - b^2)^2} + \frac{z^2}{(\rho^2 - c^2)^2}, \tag{268}$$

A, B, C étant les axes de l'ellipsoïde critique.

Pour la figure piriforme $n = 3$, on a

$$\zeta = \varepsilon l z \left(\frac{x^2}{\alpha - a^2} + \frac{y^2}{\alpha - b^2} + \frac{z^2}{\alpha - c^2} - 1 \right). \tag{269}$$

Si l'on désigne par X, Y, Z les coordonnées d'un point de la figure de déformation, on peut écrire

$$\zeta^2 = (X - x)^2 + (Y - y)^2 + (Z - z)^2,$$

$$X = x + \frac{x}{A^2}\zeta l, \qquad Y = y + \frac{y}{B^2}\zeta l, \qquad Z = z + \frac{z}{C^2}\zeta l. \tag{270}$$

Liapounoff écrit aussi, en introduisant les angles φ et ψ,

$$\left\{ \begin{aligned} X &= \sqrt{1+\zeta}\, A \cos\varphi \cos\psi, \\ Y &= \sqrt{1+\zeta}\, B \cos\varphi \sin\psi, \\ Z &= \sqrt{1+\zeta}\, C \sin\varphi. \end{aligned} \right. \tag{271}$$

Considérons la section de la figure par le plan xz, où $y = 0$, et tenons compte de l'équation de l'ellipsoïde pour éliminer x, on obtient

$$\frac{A^2}{l^2} = 1 - \left(1 - \frac{A^2}{C^2}\right)\frac{z^2}{C^2} = 1 - \frac{a^2 - c^2}{C^2}\,\frac{z^2}{C^2}, \tag{272}$$

la seconde forme étant obtenue en remarquant que l'on a

$$C^2 - A^2 = (\rho^2 - c^2) - (\rho^2 - a^2) = a^2 - c^2.$$

En désignant par E la forme quadratique dans ζ, on peut de même écrire dans le plan xz

$$E = \frac{A^2}{\alpha - a^2} - 1 + z^2\left(\frac{1}{\alpha - c^2} - \frac{A^2}{C^2}\frac{1}{\alpha - a^2}\right).$$

En remplaçant A^2 par son expression en C^2, on a

$$A^2 + a^2 = \rho^2 = C^2 + c^2,$$

$$(273) \qquad E = \frac{\rho^2 - \alpha}{\alpha - a^2}\left(1 - \frac{a^2 - c^2}{\alpha - c^2}\frac{z^2}{\rho^2 - c^2}\right).$$

Les *points nodaux* de l'intersection de la surface de l'ellipsoïde et de la figure de déformation, pour lesquels on a $\zeta = 0$, sont déterminés par les valeurs

$$z = 0 \qquad \text{et} \qquad E = 0,$$

c'est-à-dire

$$(274) \qquad \frac{z^2}{\rho^2 - c^2} = \frac{\alpha - c^2}{a^2 - c^2} \qquad \text{ou} \qquad z = \pm\rho\sqrt{\alpha},$$

en passant aux notations simplifiées, $c = 0$ et $a = 1$.

Si l'on considère la section de la figure par le plan yz, ou $x = 0$, il suffira de changer a en b dans les formules précédentes. Les points nodaux seront déterminés par l'équation

$$(275) \qquad \frac{z^2}{\rho^2 - c^2} = \frac{\alpha - c^2}{b^2 - c^2}, \qquad z = \pm\frac{\rho}{b}\sqrt{\alpha}.$$

Remarque. — Pour les autres figures d'équilibre il y aura dans ζ autant d'expressions E que de racines α dans R_k et autant de points nodaux correspondants et donnés par les mêmes formules que ci-dessus. Les rapports des z de deux points nodaux correspondant au même α seront donnés, d'après (274) et (275), par

$$(276) \qquad \frac{z_1^2}{z_2^2} = \frac{b^2 - c^2}{a^2 - c^2}, \qquad \frac{z_1}{z_2} = \frac{b}{a}.$$

Ces valeurs tendent l'une vers l'autre à mesure que n augmente car l'ellipsoïde critique s'allonge de plus en plus et b tend vers a.

Si l'on porte les valeurs de l et de E dans la formule (269), la valeur de ζ s'écrira

$$(277) \qquad \zeta = \varepsilon\frac{\rho^2 - \alpha}{\alpha - a^2}\frac{AC^2 z}{\sqrt{C^4 - (a^2 - c^2)z^2}}\left(1 - \frac{a^2 - c^2}{\alpha - c^2}\frac{z^2}{\rho^2 - c^2}\right).$$

Désignons par ζ_0 la valeur de ζ à l'extrémité du grand axe, où $z = C$, on aura

$$\sqrt{C^4 - (a^2 - c^2)C^2} = C\sqrt{C^2 - a^2 + c^2} = AC.$$

$$(278) \qquad \zeta_0 = \varepsilon C^2 \frac{\rho^2 - \alpha}{\alpha - c^2} = \varepsilon \frac{\rho^2(\rho^2 - \alpha)}{\alpha}.$$

En introduisant cette valeur de ζ_0 dans ζ au lieu de ε, on a

$$(279) \qquad \zeta = \zeta_0 \frac{Az}{\sqrt{C^4 - (a^2 - c^2)z^2}} \frac{\alpha - c^2}{\alpha - a^2}\left(1 - \frac{a^2 - c^2}{\alpha - c^2}\frac{z^2}{\rho^2 - c^2}\right).$$

Il suffit de remplacer a par b pour obtenir la valeur de ζ correspondant à la section par le plan yz, ou $x = 0$.

En faisant maintenant

$$c = 0, \qquad a = 1, \qquad A = \sqrt{\rho^2 - 1}, \qquad C = \rho,$$

on a l'expression simple qui exprime ζ en fonction de z et des valeurs de ρ et de α déterminées précédemment

$$(280) \quad \zeta = \zeta_0 \frac{\sqrt{\rho^2 - 1}}{\rho^2(1 - \alpha)} \frac{z(z^2 - \alpha\rho^2)}{\sqrt{\rho^4 - z^2}}, \qquad \zeta = \zeta_0 \frac{\sqrt{\rho^2 - 1}}{\rho^2(1 - \alpha)} \frac{z(b^2 z^2 - \alpha\rho^2)}{\sqrt{\rho^4 - b^2 z^2}}.$$

Les intersections des deux surfaces sont données par les valeurs de z qui annulent ζ. Il y a intersection dans le plan médian pour $z = 0$. Il y a deux autres intersections, suivant deux courbes gauches entourant le grand axe et comprises entre les abscisses

$$\frac{z_1}{C} = \pm\sqrt{\alpha} = 0{,}7579, \qquad \frac{z_2}{C} = \pm\frac{\sqrt{\alpha}}{b} = 0{,}7890$$

qui déterminent les points nodaux des intersections (*fig.* 42).

La dérivée des expressions en z de ζ est

$$\frac{2z^4 - 3\rho^4 z^2 + \alpha\rho^6}{(\rho^4 - z^2)^{\frac{3}{2}}} \quad \text{et} \quad \frac{2b^4 z^4 - 3b^2\rho^4 z^2 + \alpha\rho^6}{(\rho^4 - b^2 z^2)^{\frac{3}{2}}},$$

expressions qui s'annulent pour les valeurs

$$\frac{z_m}{\rho} = \pm 0{,}4882 \qquad \text{et} \qquad \frac{z'_m}{\rho} = \frac{z_m}{\rho b} = \pm 0{,}5081.$$

et l'on a, pour la valeur correspondante de ζ,

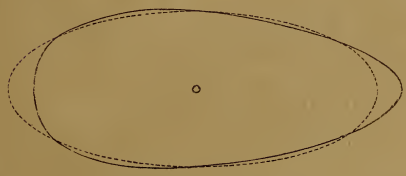
$$\zeta_m = 0,1498\zeta_0, \qquad \zeta'_m = \frac{\zeta_m}{b} = 0,1559\zeta_0.$$

Si l'on fait croître z de 0 à C, la valeur de z, d'abord négative, passe par un minimum égal à ζ_m pour z_m dans le plan xz et égal à ζ'_m pour z'_m dans le plan yz. Ensuite ζ croît, s'annule pour la valeur z_1 dans le plan xz et pour la valeur z_2 dans le plan yz, puis croît jusqu'à la valeur ζ_0.

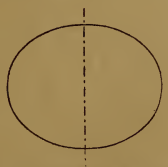
Quand on fait varier z de 0 à — C, ζ reprend les mêmes valeurs

Fig. 42.

Section par le plan des xz.



Section par le plan des yz.



Section par le plan des xy.

avec le signe contraire. Il a un maximum ζ'_m et la valeur limite $-\zeta_0$. Les courbes de la figure 42 représentent ces variations. Le poin-

tillé représente la section de l'ellipsoïde (*voir* aussi *fig.* 40 *bis*, n° 82).

Limite de la déformation. — La longueur ζ est reportée sur la normale à l'ellipsoïde et représente l'épaisseur de la masse additionnelle, positive ou négative, qui donne la figure de déformation.

On considère ζ comme infiniment petit et l'on a des cylindres élémentaires de hauteur ζ et de base $d\sigma$ reportés sur la surface de l'ellipsoïde. Darwin avait déjà remarqué que la déformation devait rester infiniment petite pour l'application rigoureuse de la formule (269) et il avait calculé la déformation en seconde approximation. Quand ζ est négatif et pris à l'intérieur de l'ellipsoïde, les cylindres élémentaires tendent à devenir des cônes. Au sommet du grand axe par exemple, où l'on a $\zeta = -\zeta_0$, les cylindres sont devenus des cônes quand ζ_0 a atteint la valeur du rayon de courbure en ce point. On peut admettre que la formule générale est encore applicable jusque-là, comme première approximation, mais on ne peut pas donner à ζ_0 des valeurs plus grandes, car les volumes élémentaires ne seraient plus exactement définis. Il n'est même pas nécessaire que la figure ait un rentrant.

Les rayons de courbure principaux en ce point sont $\frac{A^2}{C}$ et $\frac{B^2}{C}$; on doit donc avoir

$$\zeta_0 \geqq \frac{A^2}{C} = \frac{\rho^2 - 1}{\rho}, \qquad \frac{\zeta_0}{\rho} \leqq 0,119.$$

Ainsi la déformation maximum à l'extrémité du grand axe ne devra pas dépasser les $\frac{12}{100}$ du grand axe.

Les maximum et minimum de ζ correspondants seront dans les deux plans de coordonnées

$$\zeta_m = 0,0178 \qquad \text{et} \qquad \zeta'_m = 0,0185.$$

En calculant ζ pour différentes valeurs de z on obtient le tableau suivant dans le plan xz. La première ligne donne les valeurs de z en prenant le grand axe comme unité. La seconde ligne donne les valeurs correspondantes de ζ en prenant ζ_0 comme unité. Enfin la troisième donne les valeurs de ζ en prenant le grand axe comme unité et en donnant à ζ_0 sa valeur maximum à la limite de défor-

mation 0,119 :

$\frac{z}{C} = \frac{z}{\rho} =$	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
$\frac{\zeta}{\zeta_0} =$	0,088	0,145	0,126	0,064	—1
$\frac{\zeta}{\rho} =$	0,0105	0,0172	0,0150	0,0077	0,119

Les courbes de la figure 42 représentent à peu près les courbes dans le cas de la limite de déformation.

Dans le calcul que Darwin a fait des valeurs de ζ en seconde approximation, non seulement les valeurs respectives sont modifiées, mais les positions des points nodaux sont également déplacées. La valeur absolue de $-\zeta_0$ est plus petite que celle de ζ_0 (*fig.* 40 *ter*, n° 82).

Seconde figure de bifurcation pour $n = 4$. — La valeur de ζ contient deux expressions E :

$$\zeta = \varepsilon l \left(\frac{x^2}{\alpha_1 - a^2} + \frac{y^2}{\alpha_1 - b^2} + \frac{z^2}{\alpha_1 - c^2} \right) \times \left(\frac{x^2}{\alpha_2 - a^2} + \frac{y^2}{\alpha_2 - b_2} + \frac{z^2}{\alpha_2 - c^2} \right) = \varepsilon l \, E_1 E_2 ;$$

$$l = \frac{AC^2}{\sqrt{C^4 - (a^2 - c^2) z^2}} = \frac{\rho^2 \sqrt{\rho^2 - 1}}{\sqrt{\rho^4 - z^2}}.$$

Les expressions E peuvent s'écrire, pour la section $y = 0$ du plan xz,

$$E_1 = \frac{\rho^2 - \alpha_1}{\alpha_1 - a^2} \left(1 - \frac{a^2 - c^2}{\alpha_1 - c^2} \frac{z^2}{\rho^2 - c^2} \right) = \frac{\rho^2 - \alpha_1}{1 - \alpha_1} \cdot \frac{z^2 - \alpha_1 \rho^2}{\alpha_1 \rho^2}.$$

On a dans la seconde expression introduit les simplifications ordinaires. L'expression correspondante E_2 s'écrirait en remplaçant α_1 par α_2.

Pour obtenir les expressions correspondant au plan yz, il suffit de remplacer a par b. Alors dans l'expression simplifiée, z est remplacé par $b^2 z^2$ et $1 - a_1$ par $b^2 - \alpha_1$.

La valeur de la déformation dans le plan xz sera donc donnée par

$$\zeta = \varepsilon \frac{\sqrt{\rho^2 - 1}}{\alpha_1 \alpha_2 \rho^2} \frac{\rho^2 - \alpha_1}{1 - \alpha_1} \frac{\rho^2 - \alpha_2}{1 - \alpha_2} \frac{(z^2 - \alpha_1 \rho^2)(z^2 - \alpha_2 \rho^2)}{\sqrt{\rho^4 - z^2}}.$$

Au point $z = C$, on a $z = \rho$ et $\zeta = \zeta_0$

$$\zeta_0 = \varepsilon \frac{\rho}{\alpha_1 \alpha_2} (\rho^2 - \alpha_1)(\rho^2 - \alpha_2),$$

$$\zeta = \frac{\zeta_0}{\rho^3} \frac{\sqrt{\rho^2 - 1}}{(1 - \alpha_1)(1 - \alpha_2)} \frac{(z^2 - \alpha_1 \rho^2)(z^2 - \alpha_2 \rho^2)}{\sqrt{\rho^4 - z^2}}.$$

Quand z varie de o à C, ζ s'annule deux fois et change de signe.

Sur la section xz, ces valeurs où les deux figures se coupent sont définies par

$$\frac{z_1}{C} = \pm \sqrt{\alpha_1} = 0,3379, \qquad \frac{z_2}{C} = \pm \sqrt{\alpha_2} = 0,8559.$$

Sur la section yz on aura

$$\frac{z'_1}{C} = + \frac{\sqrt{\alpha_1}}{b} = 0,3416, \qquad \frac{z'_2}{C} = \pm \frac{\sqrt{\alpha_2}}{b} = 0,8652.$$

Il y aura de plus maximum ou minimum pour les valeurs de z qui annulent ζ'

$$\zeta' = \frac{\zeta_0}{\rho^5} \frac{\sqrt{\rho^2 - 1}}{(1 - \alpha_1)(1 - \alpha_2)} \times \frac{\alpha_1 \alpha_2 \rho^4 - 2(\alpha_1 + \alpha_2)\rho^6 + (4\rho^2 + \alpha_1 + \alpha_2)\rho^2 z^2 - 3z^4}{(\rho^4 - z^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

On a $\zeta' = 0$ pour $z = 0$ et pour la racine plus petite que 1 du trinome en z^2. On a alors pour cette valeur et la valeur correspondante ζ_m de ζ

$$\frac{z_m}{C} = \pm 0,6826, \qquad \zeta_m = 0,1354 \zeta_0.$$

La valeur de ζ de la section médiane $z = 0$ est donnée par

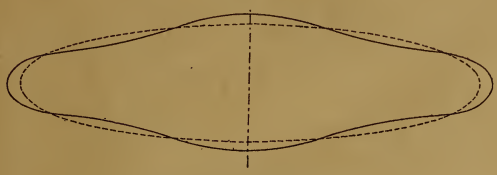
$$\zeta = \zeta_0 \frac{\sqrt{\rho^2 - 1}}{\rho} \frac{\alpha_1 \alpha_2}{(1 - \alpha_1)(1 - \alpha_2)} = 0,0908 \zeta_0.$$

Elle est environ dix fois plus faible que la variation suivant le grand axe.

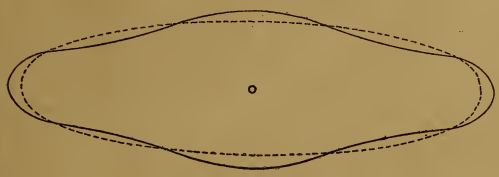
On aura deux figures différentes suivant le signe de ζ_0, c'est-à-dire suivant le sens de la déformation aux extrémités du grand axe. Le signe et le sens de la déformation sont les mêmes d'ailleurs à la partie moyenne qu'aux extrémités.

Pour $\zeta_0 > 0$, on a la *surface de Poincaré positive* (*fig.* 43). L'ellipsoïde s'allonge aux deux extrémités du grand axe, se renfle en un bourrelet autour de la section moyenne, comprenant le petit axe et l'axe moyen. Il y a deux dépressions entre ces trois renflements, entre z_1 et z_2 et entre z'_1 et z'_2.

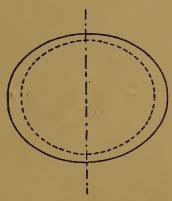
Fig. 43.



Section par le plan des xz.



Section par le plan des yz.



Section par le plan des xy.

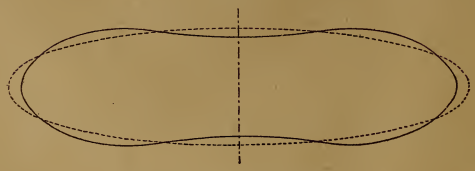
Pour $\zeta_0 < 0$, on obtient la *surface de Poincaré négative* (*fig.* 44). Il y a une dépression aux deux extrémités du grand axe et un autre étranglement circulaire autour de la région moyenne. La figure d'équilibre prend la forme d'une *haltère* avec deux renflements aux extrémités. La dépression aux extrémités du grand axe est alors limitée par la longueur du rayon de courbure,

comme dans la figure piriforme. On aura

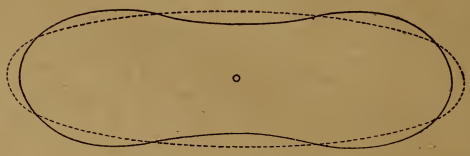
$$\zeta_0 \leqq \frac{A^2}{C} = \frac{\rho^2 - 1}{\rho}, \qquad \frac{\zeta_0}{\rho} \leqq 0{,}0663.$$

Cette dépression ne peut pas atteindre les $\frac{7}{100}$ du grand axe.

Fig. 44.



Section par le plan des xz.



Section par le plan des yz.

Section par le plan des xy.

Pour la figure de Poincaré positive au contraire, il n'y a pas de limitation théorique aux deux étranglements circulaires, du moins en considérant la valeur donnée pour ζ comme une première approximation, qui pourrait être assez différente de la valeur de ζ en réalité ou en seconde approximation, comme pour la figure piriforme.

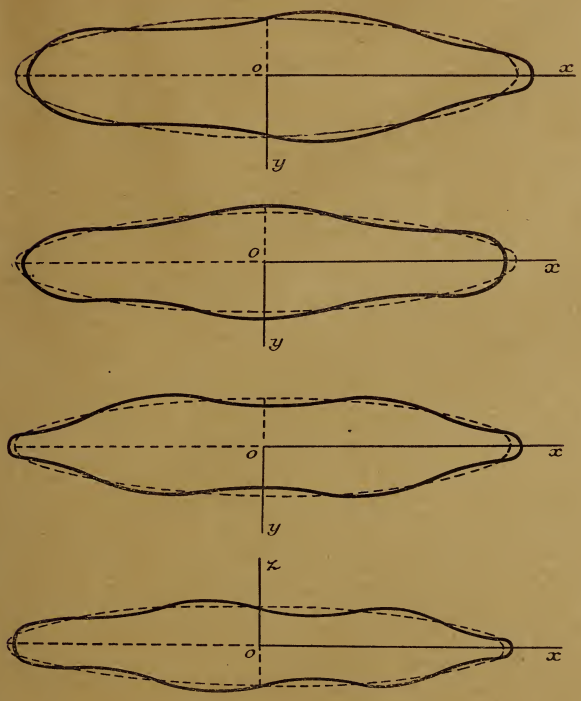
Les étranglements détermineront la rupture et la formation de deux satellites, quand la courbe de dépression entre z_1 et z_2 sera

tangente au grand axe. Cela aura lieu quand on aura

$$X = 0 \qquad \text{et} \qquad X' = \frac{dX}{dz} = 0,$$

$$X = x\left(1 + \frac{\zeta l}{\Lambda^2}\right), \qquad \frac{dX}{dz} = \left(1 + \frac{\zeta l}{\Lambda^2}\right)\frac{dx}{dz} + \frac{x}{\Lambda^2}\frac{d\zeta l}{dz}.$$

Fig. 44 *a, b, c, d.*



La première condition donne

$$-\zeta l = \Lambda^2 = \rho^2 - 1, \qquad \frac{\zeta_0}{\rho^2(1-\alpha_1)(1-\alpha_2)}\,\frac{(z^2-\alpha_2\rho^2)(z^2-\alpha_2\rho^2)}{\rho^4 - z^2} = 1.$$

La seconde condition, en tenant compte de la première, se réduit à

$$\frac{d\zeta\, l}{dz} = 0, \qquad z^4 - 2\rho^4 z^2 + (\alpha_1 + \alpha_2)\rho^4 - \alpha_1 \alpha_2 \rho^2 = 0.$$

Il y a une valeur de z plus petite que 1 qui convient seule. En la portant dans la formule ci-dessus, elle donne la valeur limite de ζ_0. On obtient

$$\frac{z_0}{C} = \pm\, 0,7084, \qquad \frac{\zeta_0}{C} = 1,373.$$

Pour qu'il y ait rupture, il faudrait que l'allongement à l'extrémité du grand axe dépasse la valeur du grand axe lui-même de plus d'un tiers. La déformation serait trop considérable et ceci montre que, même dans le cas de la figure positive, on ne peut donner à ζ_0 que des valeurs très petites pour rester au voisinage de la réalité. Le maximum de ζ dans le renflement de la partie médiane serait alors $\zeta_m = 0,908\,\zeta_0$ ou $0,1247$.

En donnant à z différentes valeurs entre 0 et C on obtient les valeurs correspondantes de ζ qui permettent de construire la courbe dans le plan xz :

$\frac{z}{C} =$	0,0	0,2	0,4	0,6	0,8	0,9	1,0
$\frac{\zeta}{\zeta_0} =$	0,091	0,057	0,029	0,122	0,082	0,120	1,0
$\frac{\zeta}{\rho} =$	0,006	0,0038	0,0021	0,0081	0,0055	0,0079	0,066
$\frac{\zeta}{\rho} =$	0,125	0,078	0,043	0,167	0,114	0,164	1,373

La première ligne donne la valeur de z, la seconde celle de ζ par rapport à ζ_0, la troisième celle de ζ pour la valeur limite de ζ_0 dans la figure négative et la quatrième celle de ζ pour la valeur limite de ζ_0 dans la figure positive. Les zéros de ζ ont lieu pour $z_1 = 0,338$ et $z_2 = 0,856$. Les courbes des figures 43 et 44 représentent à peu près les sections pour les valeurs de la troisième ligne, c'est-à-dire la limite de la figure négative. On voit par la dernière ligne que l'allongement considérable de la figure positive a lieu surtout pour les valeurs extrêmes de z entre 0,9 et 1.

Les calculs numériques des ellipsoïdes critiques de révolution se font plus simplement et plus rapidement que ceux relatifs aux ellipsoïdes à trois axes. Il suffit d'employer les formules analogues à celles qui nous ont donné la solution approchée, en considérant les ellipsoïdes à trois axes comme des ellipsoïdes de révolution allongés.

Nous avons remplacé la condition

$$\frac{R_1 S_1}{3} = \frac{R_k S_k}{2n+1}$$

par

$$X_1^1 Q_1^1 = X_n Q_n.$$

Ici nous avons en général

$$R_k = X_n^p = h(1+s^2)^{\frac{p}{2}} \frac{d^{n+p}(1+s^2)^n}{ds^{n+p}},$$

où l'on doit faire dans le résultat

$$s = \sqrt{\frac{\rho^2 - a^2}{a^2 - c^2}}, \qquad 1 + s^2 = \frac{\rho^2 - c^2}{a^2 - c^2}$$

ou bien, avec les notations simplifiées,

$$s = \sqrt{\rho^2 - 1}, \qquad 1 + s^2 = \rho^2.$$

Nous aurons donc en somme

$$X_1^1 Q_1^1 = X_n^p Q_n^p, \qquad Q_n^p = X_n^p \int_\rho^\infty \frac{\rho\, d\rho}{(X_n^p)^2 D}$$

où $n + p$ doit être pair.

Pour $n = 3$ et $p = 3$, on a trois méridiens symétriques d'intersection de la figure infiniment voisine avec l'ellipsoïde. On obtient une figure qui partage l'ellipsoïde en six fuseaux, formant alternativement des dépressions et des renflements d'un pôle à l'autre, comme les côtes d'un melon. Il est curieux de retrouver sur le globe terrestre la trace des mêmes déformations : les dépressions nord-sud de l'océan Pacifique, de l'océan Atlantique, de l'océan Indien avec la mer Caspienne, les renflements de l'Amérique, de l'Europe et de l'Afrique, de l'Asie avec l'Océanie.

Pour $n = 4$ et $p = 0$, il y a intersection de deux figures suivant deux parallèles symétriques par rapport à l'équateur. Quand on aura déterminé ρ par l'équation ci-dessus, ce qui donne le rapport

des axes de l'ellipsoïde critique, on obtient les valeurs de α_1 et α_2 qui déterminent la position des deux parallèles d'intersection, par les mêmes équations (253') déterminées plus haut pour $n = 4$. Il suffit d'y faire

$$b = c = 0, \qquad \text{d'où} \qquad P = Q = 0.$$

On en déduit

$$\alpha_1 + \alpha_2 = \frac{8}{7}, \qquad \alpha_1 \alpha_2 = \frac{8}{35},$$

puis

$$z_1 = \pm \sqrt{\alpha_1} = 0,507, \qquad z_2 = \pm \sqrt{\alpha_2} = 0,941.$$

L'un des parallèles correspondra au milieu de l'axe équatorial et l'autre presque à l'extrémité de cet axe. On obtient un renflement aux deux pôles et un sur le cercle équatorial, avec deux dépressions circulaires, symétriques par rapport à l'équateur et comprises entre z_1 et z_2. Les deux dépressions circulaires en se creusant pourraient se rejoindre, en détachant un anneau équatorial, au lieu des deux satellites que donnerait la figure $n = 4$ étudiée ci-dessus. Ce serait le cas de l'expérience réalisée par Plateau, par la rotation d'une sphère d'huile (*fig.* 38, n° 80). Mais, dans l'expérience de Plateau, il faut tenir compte de la tension superficielle. Ce sera l'objet du Chapitre IX.

Pour le cas $n = 2$ et $p = 0$ qui détermine un autre ellipsoïde de révolution voisin, la valeur de α qui donne la position du parallèle d'intersection sera donnée par la formule

$$\frac{1}{\alpha - a^2} + \frac{1}{\alpha - b^2} + \frac{1}{\alpha - c^2} = 0,$$

où l'on fera $b = c = 0$ et $a = 1$, ce qui donne pour l'intersection

$$\alpha = \frac{1}{3}, \qquad \frac{z}{C} = \pm \sqrt{\frac{1}{3}}.$$

L'ellipsoïde critique est l'ellipsoïde E_0 correspondant à la vitesse de rotation maximum. Son intersection avec l'ellipsoïde voisin se fera sur le parallèle où l'anomalie excentrique l est donnée par

$$\sin^2 l = \frac{1}{3}, \qquad l_1 = 35^\circ 15' 52''.$$

Or, on peut voir qu'il en est de même pour tous les ellipsoïdes de révolution, qui dérivent d'un autre ellipsoïde de révolution par

accroissement ou diminution de l'aplatissement, c'est-à-dire pour toute la série des ellipsoïdes de Maclaurin. Les ellipsoïdes voisins s'articulent toujours sur le même parallèle de 35° 15′ 52″.

En effet, considérons un ellipsoïde de révolution, l'axe de rotation étant b et dont l'aplatissement varie. La conservation du volume donne

$$d(a^2 b) = 0, \qquad db = -2\frac{b}{a}da.$$

L'équation de l'ellipse méridienne donne de même pour le passage à l'ellipse infiniment voisine la condition

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \qquad \frac{x^2\,da}{a^3} + \frac{z^2\,dc}{c^3} = 0,$$

ce qui donne pour la valeur de z du parallèle commun

$$\frac{x^2}{a^2} = 2\frac{z^2}{c^2}, \qquad \text{d'où} \qquad \frac{z^2}{c^2} = \frac{1}{3}.$$

Pour un ellipsoïde très peu aplati comme la Terre, l'anomalie excentrique se confond avec la latitude géographique. Le parallèle d'articulation et de déformation sera donc celui de 35° 16′. Il reste le même pour tous les aplatissements assez petits et par conséquent pour une masse hétérogène, dont les aplatissements intérieurs sont variables. Ce sera une zone de dislocation et de fracture probable.

M. A. Véronnet a montré [1] que l'action de précession de la Lune sur la Terre produit des tensions horizontales parallèles aux méridiens, qui tendent à comprimer et à dilater alternativement les couches de l'écorce terrestre, précisément sur ce même parallèle, avec une force égale aux $\frac{4}{1000}$ de leur poids. Ces compressions et dilatations successives, concordant avec les phases de la Lune et les marées, pourraient être également une cause de fracture et de *tremblements de terre*. On remarque d'ailleurs que ce parallèle de 35° passe par San-Francisco, le Haut-Mexique, Lisbonne, la Sicile, la Perse, le Japon, qui est bien une ligne privilégiée de tremblements de terre. D'ailleurs, de Parville avait déjà relevé et signalé la coïncidence de la fréquence des tremblements de terre avec les positions critiques du Soleil et de la Lune au moment des marées maximum.

---

[1] *Thèse* et *Journal de Mathématiques*, 1912, p. 446.

CHAPITRE VIII.

ÉTUDE DE LA STABILITÉ DES FIGURES D'ÉQUILIBRE.

Cette question de la stabilité des figures d'équilibre que nous venons de déterminer est loin d'être encore complètement éclaircie. Thomson et Tait, dans leur *Natural Philosophy* (t. I, 1879, 2e édition, Cambridge), ont fait de la question générale de l'équilibre une discussion intéressante qui servira de base à notre étude.

85. **Cas des systèmes conservatifs.** — Considérons un système matériel dont la position dépend de n coordonnées $q_1, q_2, \ldots, q_n$. Nous supposons que le système est sollicité par des forces qui dépendent seulement de la position du système, ce que Tait et Thomson appellent des *forces positionnelles*, et que ces forces dérivent d'une fonction de forces $U(q_1, q_2, \ldots, q_n)$. On a alors ce qu'on appelle un *système conservatif*.

La demi-force vive T a pour expression, dans ce cas,

$$(1) \qquad T = \frac{1}{2}\Sigma m(x'^2 + y'^2 + z'^2) = \frac{1}{2}\Sigma A_{ik} q'_i q'_k \qquad (A_{ik} = A_{ki}),$$

où les coefficients A_{ik} dépendent des q. Les équations générales du mouvement ont été mises par Lagrange sous la forme classique

$$(2) \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q'_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = \frac{\partial U}{\partial q_i}.$$

Les positions d'équilibre s'obtiennent en égalant à zéro les dérivées partielles de U. Les équations d'équilibre sont précisément les équations qui expriment que la fonction U est maximum ou minimum. Ces conditions sont nécessaires pour le maximum ou le minimum, mais elles ne sont pas suffisantes.

Si U est réellement maximum, dans une certaine position, c'est là une position d'équilibre stable, quelle que soit la nature de ce maximum, c'est-à-dire quel que soit l'ordre de la première dérivée paire, qui ne soit pas nulle. Ce théorème, énoncé déjà par Lagrange, a été démontré par Lejeune-Dirichlet et porte son nom.

D'après des recherches plus récentes, on peut compléter ce théorème en disant : *Pour que l'équilibre soit stable, il faut et il suffit que* U *soit maximum.* On démontre en effet que, si U n'est pas maximum, l'équilibre n'est pas stable.

86. **Petits mouvements autour d'une position d'équilibre.** — Nous supposerons, ce qui ne restreint en rien la généralité, que, dans la position d'équilibre étudiée, tous les paramètres q sont nuls et que la valeur U est également nulle, c'est-à-dire

$$U(0, 0, \ldots, 0) = 0.$$

Bornons-nous au cas où les dérivées premières de U s'annulent dans cette position d'équilibre sans que les dérivées secondes soient nulles. En développant la valeur de U, on obtient

$$U = \frac{1}{2}(\alpha_{11} q_1^2 + 2\alpha_{12} q_1 q_2 + 2\alpha_{13} q_1 q_3 + \ldots) + U_1 = \frac{1}{2}\Sigma \alpha_{ik} q_i q_k + U_1,$$

U_1 contenant les termes en q de degré supérieur au second.

De même, en développant A_{ik} en série, on obtiendra pour la valeur de T

$$A_{ik} = a_{ik} + q_1 \frac{\partial A_{ik}}{\partial q_1} + \ldots, \qquad T = \frac{1}{2}\Sigma a_{ik} q'_i q'_k + T_1 \qquad (a_{ik} = \text{const.}),$$

où T_1 contient des termes en q, q', mais de degré supérieur au second.

En supposant l'équilibre stable, nous pouvons négliger U_1 et T_1, dans les équations des petits mouvements, car alors les q et les q' restent toujours très petits. Nous pouvons donc réduire U et T à leur premier terme et écrire

$$U = \frac{1}{2}\Sigma \alpha_{ik} q_i q_k, \qquad T = \frac{1}{2}\Sigma a_{ik} q'_i q'_k,$$

U et T sont alors des formes quadratiques à coefficients constants.

Pour éviter de trop longues écritures, nous effectuons sur les

variables q la substitution linéaire suivante :

$$\begin{aligned} q_1 &= c_{11}p_1 + c_{12}p_2 + \ldots + c_{1n}p_n, \\ q_2 &= c_{21}p_1 + c_{22}p_2 + \ldots + c_{2n}p_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ q_n &= c_{n1}p_1 + c_{n2}p_2 + \ldots + c_{nn}p_n, \end{aligned}$$

où les c sont de nouvelles constantes. Les q' se trouvent également transformés par la même substitution linéaire en fonction des p'.

Or, étant données deux formes quadratiques, on peut les ramener à une somme de carrés par une même substitution linéaire. Déterminons la substitution par cette condition, alors U et T prennent la forme suivante, où nous remettons q en place de p :

$$(3)\quad T = \frac{1}{2}(q_1'^2 + q_2'^2 + \ldots + q_n'^2), \qquad U = \frac{1}{2}(\alpha_1 q_1^2 + \alpha_2 q_2^2 + \ldots + \alpha_n q_n^2).$$

Le système étant conservatif, on a

$$dT = dU, \qquad T - U = \text{const.},$$

ce qui donne une intégrale du mouvement.

Pour avoir les équations des petits mouvements, nous n'avons qu'à écrire les équations de Lagrange correspondantes, qui sont

$$(4)\qquad q_1'' = \alpha_1 q_1, \qquad q_2'' = \alpha_2 q_2, \qquad \ldots, \qquad q_n'' = \alpha_n q_n.$$

Elles s'intègrent immédiatement

Nous distinguons alors deux cas :

1° Tous les α sont négatifs. Alors toutes les équations n'ont, comme intégrale générale, que des sinus et des cosinus. Le système s'écarte très peu de sa position d'équilibre. Dans ce cas, l'équilibre est stable :

$$q_1 = A \sin \alpha_1 t + B \cos \alpha_1 t \qquad (\alpha_1 = -\alpha_1^2).$$

2° Quelques-uns des coefficients α sont positifs. Alors les paramètres et les vitesses correspondantes peuvent croître indéfiniment avec le temps. L'équilibre est instable. Par exemple, si l'on a $\alpha_1 > 0$, l'intégrale générale de la première équation sera

$$q_1 = h_1 e^{t\sqrt{\alpha_1}} + \lambda_2 e^{-t\sqrt{\alpha_1}};$$

q_1 prend donc des valeurs de plus en plus grandes. Les équations

mêmes ne s'appliquent plus, puisqu'on a supposé les paramètres q très petits.

On peut distinguer d'ailleurs divers degrés d'instabilité : le degré d'instabilité du système est le nombre des coefficients α qui sont positifs. Si un seul paramètre est positif, cette instabilité sera du premier degré. Si tous les coefficients sont négatifs, on peut dire que l'instabilité est de degré zéro, c'est-à-dire qu'il y a stabilité.

Considérons, par exemple, un point M mobile sur une surface. Si le point se trouve au fond d'une calotte concave vers le haut, il y aura équilibre stable. Si le point pesant se trouve au sommet d'un col, sur un point à double courbure, il y a un degré seulement d'instabilité. Le point peut osciller perpendiculairement à la ligne de plus grande pente avant d'être entraîné définitivement. Enfin, si le point est au sommet d'une calotte à convexité dirigée vers le haut, l'instabilité est du second degré : il y a instabilité complète, car le mouvement est à deux paramètres. Tout déplacement du point détruira l'équilibre.

87. **Cas des systèmes dissipatifs.** — Considérons le même système que précédemment et dans la même position. Nous supposons qu'on lui applique les mêmes forces positionnelles, mais aussi qu'on ajoute de nouvelles forces, qui, cette fois, dépendent des vitesses et qu'on appellera, avec Tait et Thomson, des *forces motionnelles*.

Nous considérons plus particulièrement les forces qui donnent naissance à la viscosité des fluides. Nous supposons donc que sur chaque point de masse m, animé d'une vitesse v, agit une force F proportionnelle à la vitesse et dirigée en sens inverse : $F = -kv$.

Calculons d'abord les composantes de ces forces et leur travail. Soient m_i la masse d'un point; x'_i, y'_i, z'_i les composantes de sa vitesse :

$$x'_i = \frac{dx_i}{dt}, \qquad y'_i = \frac{dy_i}{dt}, \qquad z'_i = \frac{dz_i}{dt}.$$

La force de viscosité aura donc par définition, pour composantes,

$$X_i = -k_i x'_i, \qquad Y_i = -k_i y', \qquad Z_i = -k_i z'_i,$$

k_i étant un coefficient positif.

Le travail élémentaire de ces forces, dans le déplacement réel, sera

$$\mathfrak{T} = \Sigma(X_i\,dx_i + Y_i\,dy_i + Z_i\,dz_i) = -\frac{1}{dt}\Sigma k_i(dx_i^2 + dy_i^2 + dz_i^2).$$

De même le travail élémentaire, dans un déplacement virtuel compatible avec les liaisons sera

$$\mathfrak{T}' = \Sigma(X_i\,\delta x_i + Y_i\,\delta y_i + Z_i\,\delta z_i) = -\frac{1}{dt}\Sigma k_i(dx_j\,\delta x_i + dy_i\,\delta y_i + dz_i\,\delta z_i).$$

Calculons ces expressions en fonction des paramètres, on a

$$x_i = f_i(q_1, q_2, \ldots, q_n), \quad y_i = \varphi_i(q_1, q_2, \ldots, q_n), \quad z_i = \psi_i(q_1, q_2, \ldots, q_n);$$

d'où

$$dx_i = \frac{\partial x_i}{\partial q_1}dq_1 + \frac{\partial x_i}{\partial q_2}dq_2 + \ldots + \frac{\partial x_i}{\partial q_n}dq_n$$

et

$$\delta x_i = \frac{\partial x_i}{\partial q_1}\delta q_1 + \frac{\partial x_i}{\partial q_2}\delta q_2 + \ldots + \frac{\partial x_i}{\partial q_n}\delta q_n.$$

Calculons $\mathfrak{T}'$, on aura une forme quadratique analogue à celle d'une force vive où les masses seraient remplacées par les coefficients k_i. On aura donc

$$\mathfrak{T} = -\frac{1}{dt}\Sigma B_{ik}\,dq_i\,dq_k \qquad (B_{ik} = B_{ki}).$$

Pour calculer $\mathfrak{T}'$, introduisons une notation plus commode, et pour cela considérons la forme quadratique

$$f(q'_1, q'_2, \ldots, q'_n) = \frac{1}{2}\Sigma B_{ik}\,q'_i q'_k = \frac{1}{2}(B_{11}q'^2_1 + 2B_{12}q'_1 q'_2 + \ldots),$$

$\mathfrak{T}'$ est une forme bilinéaire en dq_1, dq_2, ..., dq_n et δq_1, δq_2, ..., δq_k. C'est ce qu'on appelle la *forme polaire* de la forme $\mathfrak{T}$. On peut alors l'écrire immédiatement

$$\mathfrak{T}' = -\frac{1}{dt}\Sigma B_{ik}\,dq_i\,\delta q_k.$$

Elle se réduit à la forme $\mathfrak{T}$ quand le déplacement virtuel est identique au déplacement réel.

Écrivons $\mathfrak{T}'$ sous la forme suivante et développons :

$$\begin{aligned}\mathfrak{T}' &= -\Sigma B_{ik} q'_i \delta q_k \\ &= -\delta q_1 (B_{11} q'_1 + B_{12} q'_2 + \ldots + B_{1n} q'_n) \\ &\quad - \delta q_2 (B_{21} q'_1 + B_{22} q'_2 + \ldots + B_{2n} q'_n) \\ &\quad - \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\quad - \delta q_n (B_{n1} q'_1 + B_{n2} q'_2 + \ldots + B_{nn} q'_n),\end{aligned}$$

Introduisons maintenant la forme quadratique f définie ci-dessus. Le travail virtuel pourra alors s'écrire

$$(5) \qquad -\mathfrak{T}' = \frac{\partial f}{\partial q'_1} \delta q_1 + \frac{\partial f}{\partial q'_2} \delta q_2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial q'_n} \delta q_n.$$

88. **Équations des petits mouvements dans le cas d'un système dissipatif.** — Les forces appliquées sont de deux sortes : celles qui dérivent de la fonction de forces U et celles qui proviennent de la viscosité. La somme des travaux virtuels de ces forces se composera donc de deux parties :

$$\begin{aligned}&\frac{\partial U}{\partial q_1} \delta q_1 + \frac{\partial U}{\partial q_2} \delta q_2 + \ldots + \frac{\partial U}{\partial q_n} \delta q_n, \\ &-\frac{\partial f}{\partial q'_1} \delta q_1 - \frac{\partial f}{\partial q'_2} \delta q_2 + \ldots - \frac{\partial f}{\partial q'_n} \quad {}_n.\end{aligned}$$

Le coefficient de δq_1 sera donc

$$Q_1 = \frac{\partial U}{\partial q_1} - \frac{\partial f}{\partial q'_1}.$$

Les équations de Lagrange deviennent alors

$$(6) \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q'_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = \frac{\partial U}{\partial q_i} - \frac{\partial f}{\partial q'_i}.$$

Nous faisons toujours ici la même approximation que dans le cas précédent, en négligeant les termes du second ordre et en prenant seulement les valeurs principales des paramètres et des vitesses, de sorte que U et T conservent les mêmes formes quadratiques (3). Nous simplifions de même f en développant ses coefficients B_{ik} dans le voisinage de la position d'équilibre

$$B_{ik} = b_{ik} + q_1 \frac{\partial B_{ik}}{\partial q_1} + \ldots, \qquad \text{d'où} \qquad f = \frac{1}{2} \Sigma b_{ik} q'_i q'_k,$$

en réduisant B_{ik} à la constante b_{ik}. Il faut remarquer que T est essentiellement positif. Il en est de même de f.

Les équations du mouvement deviennent alors, avec ces hypothèses,

$$q''_1 = \alpha_1 q_1 - (b_{11} q'_1 + b_{12} q'_2 + \ldots + b_{1n} q'_n),$$
$$q''_2 = \alpha_2 q_2 - (b_{21} q'_1 + b_{21} q'_2 + \ldots + b_{2n} q'_n)$$

ou, en général,

$$(7) \qquad q''_i = \alpha_i q_i - \Sigma b_{ik} q'_k = \alpha_i q_i - \frac{\partial f}{\partial q'_i},$$

où f est la forme quadratique essentiellement positive

$$2f = b_{11} q'^2_1 + 2 b_{12} q'_1 q'_2 + \ldots = \Sigma b_{ik} q'_i q'_k \qquad (b_{ik} = b_{ki}).$$

Le premier terme du second membre des équations du mouvement (7) comprend les forces positionnelles ou conservatives fonctions des q_i. Le second comprend les forces motionnelles ou forces dissipatives de viscosité, fonctions des q'_i.

Nous avions fait une hypothèse particulière sur la nature de ces forces dissipatives, en les attribuant à la viscosité. Nous appellerons plus généralement *forces dissipatives* celles qui conduisent à des équations du mouvement de cette forme, quelle que soit la nature de ces forces. On dira alors qu'on a un *système dissipatif*. Ce sera le cas des systèmes où il y a des résistances passives.

Remarque. — Un tel système est appelé *dissipatif* pour la raison suivante. Multiplions les équations (7) du mouvement successivement par $q'_1, q'_2, \ldots, q'_n$, et ajoutons-les; il vient

$$(8) \qquad \frac{dT}{dt} = \frac{dU}{dt} - 2f \qquad \text{ou} \qquad \frac{d(T - U)}{dt} = -2f.$$

Or, f étant essentiellement positif, il s'ensuit que l'énergie totale T — U va en diminuant. L'énergie se dissipe à partir de sa valeur initiale.

89. **Dissipativité complète et incomplète.** — Pour que l'énergie se dissipe dans tous les mouvements possibles, il faut que les forces dissipatives soient complètes, c'est-à-dire que f dépende explicitement de tous les q'.

Supposons, par exemple, que f ne dépende pas de q'_1. Cela veut

dire que

$$b_{11} = 0, \qquad b_{12} = 0, \qquad \ldots, \qquad b_{1n} = 0.$$

Alors la première équation du mouvement est indépendante de f et de la dissipativité, et q'_1 n'entre plus dans les autres équations.

Comme les paramètres q sont indépendants et que le système se trouve dans une position d'équilibre, on peut faire subir au système un déplacement qui porte seulement sur le paramètre q_1. Les paramètres q_2, q_3, ..., q_n conservent leurs valeurs d'équilibre, c'est-à-dire nulles, d'après les hypothèses faites. Nous donnons à q_1 une valeur assez petite dans le voisinage de la position d'équilibre et compatible avec les données du problème. Le mouvement qui en résultera aura pour équations

$$q''_1 = \alpha_1 q_1, \qquad q''_2 = 0, \qquad \ldots, \qquad q''_n = 0.$$

Ce mouvement ne dépend plus de f, qui est nul, puisque cette fonction est indépendante de q'_1 et que tous les autres q'_i sont nuls. L'énergie totale reste donc constante dans ce cas.

Ainsi, dans le cas de forces dissipatives incomplètes parmi tous les mouvements possibles autour de la position d'équilibre, il y a des mouvements dans lesquels l'énergie est conservée.

Nous allons résoudre les équations du mouvement dans le cas de la dissipativité complète.

Dans ce cas, T — U va en diminuant dans tous les mouvements possibles du système. Il s'agit d'intégrer un système d'équations linéaires simultanées. On pose donc

$$q_1 = \lambda_1 e^{rt}, \qquad q_2 = \lambda_2 e^{rt}, \qquad \ldots, \qquad q_n = \lambda_n e^{rt},$$

et l'on porte ces expressions dans les équations du mouvement. Il vient, en divisant par e^{rt} :

$$\begin{array}{llllll}
\lambda_1(b_{11}r + r^2 - \alpha_1) + & \lambda_2 b_{12} r & + \lambda_3 b_{13} r + \ldots + & \lambda_n b_{1n} r & = 0, \\
\lambda_1 b_{21} r & + \lambda_2(b_{22} r + r^2 - \alpha_2) + & \lambda_3 b_{23} r + \ldots + & \lambda_n b_{2n} r & = 0, \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots, \\
\lambda_1 b_{n1} r & + \lambda_2 b_{n2} r & + \lambda_3 b_{n3} r + \ldots + & \lambda_n(b_{nn} r + r^2 - \alpha_n) & = 0.
\end{array}$$

Pour que ce système de n équations en λ ait des solutions non nulles, il faut que le déterminant soit nul. C'est l'équation caractéristique du système des équations linéaires. Nous la désignerons

par $F(r)$:

$$F(r) = \begin{vmatrix} b_{11}r + r^2 - \alpha_1 & b_{12}r & b_{13}r & \ldots & b_{1n}r \\ b_{21}r & b_{22}r + r^2 - \alpha_2 & b_{23}r & \ldots & b_{2n}r \\ \ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{n1}r & b_{n2}r & b_{n3}r & \ldots & b_{nn}r + r^2 - \alpha_n \end{vmatrix} = 0.$$

Si l'on peut trouver une racine de cette équation, les n équations en λ se réduiront à $n-1$ équations d'où l'on pourra tirer des valeurs proportionnelles à $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. En désignant par $f_1(r)$, $f_2(r)$, ..., $f_n(r)$ les mineurs de $F(r)$, en supposant la dernière ligne éliminée par exemple, il vient, pour chaque valeur de r racine de $F(r) = 0$,

$$\frac{\lambda_1}{f_1(r)} = \frac{\lambda_2}{f_2(r)} = \ldots = \frac{\lambda_n}{f_n(r)} = \mu,$$

où μ est une constante arbitraire.

Si $r = r_1$ est une racine de $F(r) = 0$, et si μ_1 est la valeur arbitraire de la constante, on déduit de ces équations d'abord la valeur des λ :

$$\lambda_1 = \mu_1 f_1(r_1), \qquad \lambda_2 = \mu_1 f_2(r_1), \qquad \ldots, \qquad \lambda_n = \mu_1 f_n(r_1),$$

puis la solution particulière du système

$$q_1 = \mu_1 f_1(r_1)\, e^{r_1 t}, \qquad q_2 = \mu_1 f_2(r_1)\, e^{r_1 t}, \qquad \ldots, \qquad q_n = \mu_1 f_n(r_1)\, e^{r_1 t}.$$

Avec la racine r_2 et une constante arbitraire correspondante μ_2, on obtiendrait de même une seconde solution particulière, et ainsi de suite.

Avec les n solutions correspondant à n racines de l'équation caractéristique, on formera l'intégrale générale par addition des n intégrales particulières obtenues. On aura

$$\begin{aligned} q_1 &= \mu_1 f_1(r_1)\, e^{r_1 t} + \mu_2 f_1(r_2)\, e^{r_2 t} + \ldots + \mu_n f_1(r_n)\, e^{r_n t}, \\ q_2 &= \mu_1 f_2(r_1)\, e^{r_1 t} + \mu_2 f_2(r_2)\, e^{r_2 t} + \ldots + \mu_n f_2(r_n)\, e^{r_n t}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ q_n &= \mu_1 f_n(r_1)\, e^{r_1 t} + \mu_2 f_n(r_2)\, e^{r_2 t} + \ldots + \mu_n f_n(r_n)\, e^{r_n t}. \end{aligned}$$

Telles sont les équations du mouvement dans le voisinage de la position d'équilibre.

90. Stabilité de l'équilibre dans le cas de forces dissipatives. Théorème de Tait et Thomson. — Pour que l'équilibre soit stable, il faut que les racines de l'équation caractéristique $F(r) = 0$ aient toutes leurs parties réelles, négatives ou nulles.

Soit, par exemple, une racine $r = p + iq$. La condition nécessaire et suffisante pour que l'équilibre soit stable est $p \leqq 0$. Car si l'on avait p positif, le terme

$$e^{rt} = e^{pt}(\cos qt + i \sin qt)$$

augmenterait indéfiniment avec t. La valeur des q_i et des q'_i augmenterait de même sans limite et le système s'éloignerait de sa position d'équilibre. Donc, aucune racine ne doit avoir de partie réelle positive. Une partie réelle nulle introduira seulement des sinus et cosinus. Il y aura oscillation autour de la position d'équilibre. Une racine avec partie négative introduira un terme qui tend vers zéro avec le temps. Il y aura oscillations amorties autour de la position d'équilibre, où le système reviendra finalement au repos.

Tait et Thomson ont démontré un théorème très important, d'après lequel l'adjonction de forces dissipatives à un système conservatif ne change pas la nature de l'équilibre de ce système.

Soit un système soumis à des forces positionnelles conservatives, dérivant d'une fonction U. Le mouvement autour d'une position d'équilibre est défini par les équations

$$q''_1 = \alpha_1 q_1, \qquad q''_2 = \alpha_2 q_2, \qquad \ldots, \qquad q''_n = \alpha_n q_n.$$

L'adjonction de forces dissipatives transforme, par définition, ces équations dans les suivantes :

$$(9) \quad q''_1 = \alpha_1 q_1 - \frac{\partial f}{\partial q'_1}, \qquad q''_2 = \alpha_2 q_2 - \frac{\partial f}{\partial q'_2}, \qquad \ldots, \qquad q''_n = \alpha_n q_n - \frac{\partial f}{\partial q'_n}.$$

Le théorème établit que, si l'équilibre est stable sous la seule action des forces conservatives, il restera stable après l'addition des forces dissipatives. S'il est instable dans la première hypothèse, il sera encore instable après l'adjonction des forces dissipatives. Évidemment le mouvement sera modifié, mais nullement la nature même de l'équilibre.

La démonstration repose sur la relation fondamentale (8), c'est-à-

dire sur ce que les forces dissipatives introduisent une perte d'énergie

$$\frac{d(T-U)}{dt} = -2f < 0. \tag{8}$$

Premier point. — Soit $F(r) = 0$ l'équation caractéristique du système complet. Je dis que cette équation ne peut pas avoir deux racines purement imaginaires.

Supposons, en effet, que nous ayons deux de ces racines qui doivent être conjuguées, puisque les coefficients de F sont réels. Soient

$$r_1 = im \quad \text{et} \quad r_2 = -im.$$

Écrivons les solutions particulières correspondantes du système différentiel, on a

$$\begin{aligned}
q_1 &= \mu_1 f_1(r_1)\, e^{mit} + \mu_2 f_1(r_2)\, e^{-mit},\\
q_2 &= \mu_1 f_2(r_1)\, e^{mit} + \mu_2 f_2(r_2)\, e^{-mit},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
q_n &= \mu_1 f_n(r_1)\, e^{mit} + \mu_2 f_n(r_2)\, e^{-mit}.
\end{aligned}$$

Ce mouvement est un des mouvements possibles du système, par hypothèse, et nous pouvons écrire les équations du mouvement, en faisant nuls les autres μ arbitraires :

$$\begin{aligned}
q_1 &= h_1 \cos mt + k_1 \sin mt,\\
q_2 &= h_2 \cos mt + k_2 \sin mt,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
q_n &= h_n \cos mt + k_n \sin mt.
\end{aligned}$$

Dans ce cas, T prendra la forme

$$T = A + B\cos 2mt + C\sin 2mt; \tag{10}$$

mais comme, d'autre part, T est une somme de carrés, T doit être positif pendant toute la durée du mouvement, d'où la condition

$$A > +\sqrt{B^2 + C^2}.$$

D'autre part, U est également une forme quadratique, qui dans le mouvement s'écrit sous une forme analogue

$$U = A' + B'\cos 2mt + C'\sin 2mt; \tag{11}$$

mais ici le signe de U n'est pas déterminé d'avance, car nous ne savons rien sur les α.

Enfin, f est une forme quadratique des q', qui eux-mêmes sont de la même forme que les paramètres q, d'après leur expression ci-dessus. On aura donc

$$f = A'' + B'' \cos 2mt + C'' \sin 2mt;$$

mais, f étant essentiellement positive, on a encore ici la condition

$$(12) \qquad A'' > + \sqrt{B''^2 + C''^2}.$$

Écrivons maintenant l'équation (8) qui relie T, U et f au moyen de ces relations. Les dérivées de U et de T par rapport au temps ne contiendront plus les constantes A et A'. Il vient donc

$$\begin{aligned} &-(B - B')\,2m \sin 2mt + (C - C')\,2m \cos 2mt \\ &= -2A'' - 2B'' \cos 2mt - 2C'' \sin 2mt. \end{aligned}$$

Cette équation entraîne $A'' = 0$, ce qui exige également $B'' = 0$ et $C'' = 0$ d'après (12). La fonction f devrait donc être identiquement nulle dans ce cas, ce qui est impossible, car nous admettons que pour tout mouvement possible la fonction dissipative est différente de zéro (dissipativité complète).

Ainsi, quelle que soit la nature de l'équilibre avant l'addition des forces dissipatives, l'équation caractéristique relative au système complet a toutes ses racines de la forms $p + iq$, où $p \neq 0$.

Deuxième point. — Ceci établi, supposons que l'équilibre soit stable sous l'action des seules forces positionnelles. On a alors

$$\alpha_1 < 0, \qquad \alpha_2 < 0, \qquad \ldots, \qquad \alpha_n < 0,$$

avec

$$q_1 = 0, \qquad q_2 = 0, \qquad \ldots, \qquad q_n = 0.$$

Puisque l'équilibre est stable en cette position, U est maximum sans les forces dissipatives. Nous allons démontrer que l'équilibre sera encore stable après l'adjonction de ces forces. Pour cela, nous allons montrer que l'équation caractéristique ne peut pas avoir de racine ayant une partie réelle positive.

Supposons, en effet, qu'une des racines ait une partie réelle positive, alors les paramètres $q_1, q_2, \ldots, q_n$ augmentent indéfini-

ment avec le temps. Le système étant en équilibre, dérangeons-le très peu de cette position et imprimons-lui de petites vitesses. Appelons T_0 et U_0 les valeurs initiales de T et U, on a

$$\frac{d(T-U)}{dt} < 0, \qquad \text{donc} \qquad T-U < T_0 - U_0;$$

mais, comme les paramètres q augmentent indéfiniment, — U qui est essentiellement positif, à cause du signe négatif des α, augmente indéfiniment. Les vitesses q'_i augmentent aussi indéfiniment, donc T augmente sans limite.

Ainsi T — U doit décroître autour de la position d'équilibre et rester inférieur à $T_0 - U_0$, alors que dans l'hypothèse faite il augmenterait indéfiniment. Il ne peut donc pas y avoir de racines à partie réelle positive, et, si l'équilibre est stable avant l'adjonction des forces dissipatives, il le restera après.

Si l'équilibre est instable sous l'action des seules forces positionnelles, alors quelque α est positif, par exemple $\alpha_1 > 0$. Ajoutons les forces dissipatives. L'équilibre restera instable. Il suffit de montrer que dans ce cas-là toutes les racines de F ne peuvent pas avoir leurs parties réelles négatives.

En effet, dérangeons le système de sa position d'équilibre de la façon suivante : α_1 étant positif, donnons aux paramètres de petites valeurs de façon que U_0 soit positif, en prenant par exemple

$$q_1 > 0, \qquad q_2 = 0, \qquad \ldots, \qquad q_n = 0,$$

puis abandonnons le système ainsi déplacé sans vitesse initiale, c'est-à-dire $T_0 = 0$. Dans le mouvement subséquent, on aura

$$d(T-U) < 0, \qquad \text{donc} \qquad T-U < -U_0.$$

Or nous avons supposé que toutes les parties réelles des racines de F sont négatives. Donc quand t augmente, T et U tendent ensemble vers 0, parce que les paramètres q et leurs dérivées tendent vers 0. A partir d'un certain moment, T — U serait aussi voisin de 0 qu'on voudrait et ne pourrait pas rester inférieur à une quantité négative $-U_0$. Il faut donc que certaines racines r aient leur partie réelle positive; alors l'équilibre reste instable après l'adjonction des forces dissipatives.

Nous avons supposé les forces dissipatives totales. Le résultat

serait encore vrai avec des *forces dissipatives partielles*. En effet, considérons un système où l'une des équations serait sans dissipativité :

$$q''_1 = \alpha_1 q_1, \qquad q''_2 = \alpha_2 q_2 - \frac{\partial f}{\partial q'_2}, \qquad \ldots, \qquad q''_n = \alpha_n q_n - \frac{\partial f}{\partial q'_n}.$$

La première équation donne un équilibre stable ou instable quand q_1 varie. Le système des autres équations se traiterait comme précédemment. On verrait que l'adjonction de la fonction f ne change rien à la nature de l'équilibre. Le théorème est donc général.

91. **Forces motionnelles gyroscopiques.** — Au système des forces conservatives et dissipatives, ajoutons d'autres forces distinctes des premières $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$. Les équations de Lagrange correspondant à ce système s'écriront

$$(13) \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q'_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = \frac{\partial U}{\partial q_i} - \frac{\partial f}{\partial q'_i} + Q_i.$$

On dit que les forces $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$ sont gyroscopiques, si elles vérifient la condition

$$(14) \qquad Q_1 q'_1 + Q_2 q'_2 + \ldots + Q_n q'_n = 0.$$

Cela revient à dire que le travail de ces forces est nul dans le déplacement réel du système, car le fait que ce travail est nul serait exprimé par la formule identique à la précédente :

$$Q_1\, dq_1 + Q_2\, dq_2 + \ldots + Q_n\, dq_n = 0.$$

Telle est l'interprétation mécanique des forces gyroscopiques.

Voici l'origine de cette dénomination. Quand on étudie le déplacement relatif d'un point par rapport à des axes mobiles, il faut ajouter aux forces réelles certaines forces fictives, pour obtenir les équations du mouvement ou de l'équilibre, par rapport à ces axes mobiles. Ces forces fictives sont la force centrifuge et la force centrifuge composée. On sait que cette dernière force est perpendiculaire à la vitesse relative, de sorte que son travail dans le déplacement relatif est toujours nul. Or ce sont précisément ces forces centrifuges composées qui interviennent dans l'étude des

mouvements gyroscopiques. Ce sont elles en particulier qui assurent l'équilibre du mouvement de la toupie, tournant à grande vitesse sur sa pointe.

Tait et Thomson ont étendu le nom de forces gyroscopiques à toutes les forces qui jouissent de la même propriété mécanique du travail nul (14) et ils démontrent qu'elles jouissent toutes de la propriété d'assurer l'équilibre en certains cas. Il est à remarquer que, dans des cas très étendus, les équations du mouvement d'un système non holonome, sous l'action de forces données analytiquement, peuvent être ramenées à celles d'un système holonome sous l'action des mêmes forces auxquelles on ajouterait des forces gyroscopiques convenables [1].

Nous allons supposer une position d'équilibre d'un système soumis à diverses forces, en particulier à des forces gyroscopiques, et nous étudierons les petits mouvements du système autour de cette position d'équilibre.

Remarquons d'abord que les forces gyroscopiques $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$ contiennent dans leurs expressions les q', autrement l'expression qui les définit (14) ne pourrait pas être nulle identiquement, car les q' ne pourraient jamais se réduire et se détruire.

Réduisons alors ces expressions Q à leurs parties linéaires en q', simplification analogue à celle que nous avons faite pour les autres forces et qui est légitime tant que l'on s'écarte peu de la position d'équilibre où les q et q' sont nuls. Les équations de Lagrange se réduisent alors, dans ces hypothèses, aux expressions

$$q''_1 = \alpha_1 q_1 - \frac{\partial f}{\partial q'_1} + g_{11} q'_1 + g_{12} q'_2 + \ldots + g_{1n} q'_n,$$

$$q''_2 = \alpha_2 q_2 - \frac{\partial f}{\partial q'_2} + g_{21} q'_1 + g_{22} q'_2 + \ldots + g_{2n} q'_n,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$q''_n = \alpha_n q_n - \frac{\partial f}{\partial q'_n} + g_{n1} q'_1 + g_{n2} q'_2 + \ldots + g_{nn} q'_n.$$

D'ailleurs, les g ne sont pas quelconques. En effet, l'équation

---

(1) Appell, *Remarques d'ordre analytique sur une nouvelle forme des équations de la dynamique* (*Journal de Liouville*, 5e série, t. VII, 1901. p, 5-12).

de condition (14) peut s'écrire en développant

$$\begin{aligned} & g_{11} q_1'^2 + g_{12} q_1' q_2' + \ldots + g_{1n} q_1' q_n' \\ & + g_{21} q_2' q_1' + g_{22} q_2'^2 + \ldots + g_{2n} q_2' q_n' \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + g_{n1} q_n' q_1' + g_{n2} q_n' q_2' + \ldots + g_{nn} q_n'^2 \equiv 0. \end{aligned}$$

Ce qui exige $g_{11} = g_{22} = g_{33} = \ldots = g_{nn} = 0$ ou en général $g_{kk} = 0$, et $g_{12} = -g_{21}$ ou en général $g_{ik} + g_{ki} = 0$. Cette dernière condition entraîne la première, de sorte que la condition générale des forces gyroscopiques (14) peut s'écrire aussi

$$(15) \qquad \Sigma Q_i q_i' = \Sigma g_{ik} q_i' q_k' = 0 \qquad \text{où } g_{ik} + g_{ki} = 0.$$

92. Théorème de Tait et Thomson sur l'équilibre dans le cas des forces gyroscopiques. — Nous distinguerons deux cas.

Premier cas. — Supposons un système soumis à la fois aux trois sortes de forces ainsi définies : conservatives, dissipatives et gyroscopiques. *L'état d'équilibre existant sous l'action des forces conservatives seules ne sera pas changé si l'on ajoute à la fois des forces dissipatives et des forces gyroscopiques.* Réciproquement, *si l'équilibre est stable sous l'action des trois sortes de forces, il le restera si l'on supprime les forces dissipatives et gyroscopiques; s'il est instable, il le restera également.*

Pour le voir, il suffit de reproduire exactement le raisonnement fait plus haut pour les forces dissipatives seules. En effet, ce raisonnement repose entièrement sur la relation

$$(8) \qquad \frac{d(T - U)}{dt} = -2f < 0.$$

Or cette relation a lieu encore ici, car en ajoutant les équations du mouvement (13) les unes aux autres, après les avoir multipliées respectivement par les q' correspondants, comme on l'a fait au n° 88, les termes correspondant aux forces gyroscopiques donnent précisément une somme nulle. Ces forces sont donc éliminées et l'on retrouve identiquement l'expression ci-dessus qui ne dépend que de f et des forces dissipatives.

Par conséquent, $T - U$ décroît constamment dans le mouve-

ment, et, la dissipativité étant complète, la nature de l'équilibre n'est pas changée.

Il faut bien remarquer dans ce cas que les deux groupes de forces motionnelles entrent à côté des forces positionnelles.

Second cas. — Considérons maintenant un système soumis à des forces conservatives et supposons qu'on introduise seulement des forces gyroscopiques. *Il peut se faire alors que l'introduction des forces gyroscopiques seules transforme l'équilibre instable en équilibre stable.*

Les équations du mouvement sont alors, en faisant $g_{kk} = 0$,

$$\begin{aligned}
q''_1 &= \alpha_1 q_1 + g_{12} q'_2 + g_{13} q'_3 + \ldots + g_{1n} \quad q'_n,\\
q''_2 &= \alpha_2 q_2 + g_{21} q'_1 + g_{23} q'_3 + \ldots + g_{2n} \quad q'_n,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
q''_n &= \alpha_n q_n + g_{n1} q'_1 + g_{n2} q'_2 + \ldots + g_{n,n-1} q'_{n-1}.
\end{aligned}$$

1° Si le système soumis aux seules forces dérivant de U est stable, *l'adjonction des forces gyroscopiques laisse subsister la stabilité.* En effet, on a $T - U = \text{const.}$, et U est maximum dans la position d'équilibre. Il n'y a qu'à appliquer de nouveau le raisonnement du théorème de Lejeune-Dirichlet. On retrouvera la même conclusion. L'équilibre reste stable.

2° Si l'équilibre sous l'action des forces conservatives est instable, il peut devenir stable. Déterminons, en effet, l'équation caractéristique du système d'équations linéaires. Il faut égaler à o le déterminant des équations en λ :

$$\begin{aligned}
&\lambda_1(r^2 - \alpha_1) + \lambda_2 g_{12} r \quad + \ldots + \lambda_n g_{1n} r \quad = 0,\\
&\lambda_1 g_{21} r \quad + \lambda_2(r^2 - \alpha_2) + \ldots + \lambda_n g_{2n} r \quad = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
&\lambda_1 g_{n1} r \quad + \lambda_2 g_{n2} r \quad + \ldots + \lambda_n(r^2 - \alpha_n) = 0,
\end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$(16) \qquad F(r) = \begin{vmatrix} r^2 - \alpha_1 & g_{12} r & g_{13} r & \ldots & g_{1n} r \\ g_{21} r & r^2 - \alpha_2 & g_{23} r & \ldots & g_{2n} r \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ g_{n1} r & g_{n2} r & g_{n3} r & \ldots & r^2 - \alpha_n \end{vmatrix} = 0.$$

L'équilibre final, sous l'action des deux groupes de forces, sera instable si l'une quelconque des racines a sa partie réelle positive;

il sera stable si toutes les racines ont leur partie réelle négative. Ici, il s'introduit une condition nécessaire et d'ailleurs inattendue : *l'instabilité initiale doit être de degré pair.*

Soit $F(r)$ l'équation caractéristique. Le terme de degré le plus élevé est r^{2n} qui est positif. On a donc $F(\infty) > 0$. D'autre part, on a, en faisant $r = 0$,

$$F(0) = (-\alpha_1)(-\alpha_2)\ldots(-\alpha_n).$$

S'il y a un nombre impair d'α positifs, alors $F(0)$ sera négatif. Il y aura donc au moins une racine comprise entre 0 et ∞, et l'équilibre sera instable. L'instabilité initiale sera conservée.

S'il y a un nombre pair d'α positifs, alors $F(0)$ sera aussi positif et l'on ne pourra rien dire en général; car $F(r)$ peut avoir dans ce cas 0 ou un nombre pair de racines positives. *Si* $F(r)$ *n'a pas de racines positives, l'instabilité est transformée en stabilité.* Si F a des racines positives, l'instabilité demeure.

La discussion de tous les cas possibles serait longue, mais on peut montrer sur des exemples qu'effectivement dans certains cas, l'adjonction des forces gyroscopiques transforme l'instabilité en stabilité.

Exemple. — Considérons les petits mouvements d'un point définis par les équations

$$x'' = \alpha x + gy', \qquad y'' = \beta y - gx'.$$

Si l'on a $\alpha < 0$ et $\beta < 0$, il y a stabilité, avec ou sans les forces gyroscopiques. Si l'on a $\alpha > 0$ et $\beta < 0$, il y a instabilité dans les mêmes conditions.

Si enfin l'on a $\alpha > 0$ et $\beta > 0$, il y a instabilité avant l'adjonction des forces gyroscopiques. Que se passe-t-il après leur adjonction?

Posons

$$x = \lambda e^{rt}, \qquad y = \mu e^{rt};$$

d'où

$$\lambda(r^2 - \alpha) - \mu gr = 0,$$
$$\lambda gr + \mu(r^2 - \beta) = 0$$

et

$$F(r) = (r^2 - \alpha)(r^2 - \beta) + g^2 r^2 = r^4 + r^2(g^2 - \alpha - \beta) + \alpha\beta = 0.$$

Si g est nul, c'est-à-dire s'il n'y a pas de forces gyroscopiques, le système est instable comme nous l'avons vu. Mais g est arbitraire; on peut le prendre assez grand pour que l'on ait

$$(g^2 - \alpha - \beta)^2 - 4\alpha\beta > 0 \qquad \text{et} \qquad g^2 - \alpha - \beta > 0.$$

Alors l'équation ci-dessus du second degré en r^2 a deux racines réelles négatives qui donnent pour r des valeurs purement imaginaires :

$$r^2 = -h^2, \qquad r^2 = -k^2,$$
$$r = \pm ih, \qquad r = \pm ik.$$

Avec ces valeurs de r, les paramètres x et y ne contiendront que des sinus et des cosinus. Le mouvement primitivement instable sera devenu stable par l'adjonction des forces gyroscopiques.

Si le système est à *dissipativité partielle*, les mêmes conclusions sont encore vraies. Si le système primitif est stable, le système final sera stable également. Si le système primitif est instable de degré impair, il restera instable. S'il est instable de degré pair, il pourra devenir stable dans certains cas.

Supposons, par exemple, que les équations du mouvement soient de la forme suivante :

$$\begin{aligned}
q_1'' &= \alpha_1 q_1 + g q_2', \\
q_2'' &= \alpha_2 q_2 - g q_1', \\
q_3' &= \alpha_3 q_3 - \frac{\partial f}{\partial q_3'} + Q_3, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
q_n'' &= \alpha_n q_n - \frac{\partial f}{\partial q_n'} + Q_n.
\end{aligned}$$

Les deux premières équations ne contiennent pas de dissipativité f, et de plus un certain nombre de $g_{ik} = -g_{ki}$ sont nuls. Si α_1 et α_2 sont positifs et tous les auttes α négatifs, le système initial est instable ainsi que le système obtenu par l'adjonction des seules forces dissipatives. Mais, par contre, l'adjonction des forces gyroscopiques peut le rendre stable. Il suffit que g soit suffisamment grand pour stabiliser les deux premiers paramètres, comme on l'a vu ci-dessus.

C'est ce qui a lieu dans l'étude de l'équilibre relatif, par rapport à des axes entraînés, de ce qu'on appelle la *toupie dormante*. La

toupie posée sur sa pointe tomberait si des forces gyroscopiques suffisamment grandes n'existaient pas. Elle resterait toujours en équilibre s'il n'y avait pas le frottement et la résistance de l'air, forces dissipatives, qui maintiennent et ramènent l'instabilité. Car, il faut le remarquer, l'adjonction des forces dissipatives conserve toujours la nature de l'équilibre primitif, ou le ramène quand l'adjonction des forces gyroscopiques a changé l'instabilité en stabilité.

93. **Stabilité temporaire et stabilité séculaire.** — En résumé, un système en équilibre dans lequel les forces dérivent d'une fonction de forces U doit vérifier les conditions

$$\frac{\partial U}{\partial q_1} = 0, \qquad \frac{\partial U}{\partial q_2} = 0, \qquad \ldots, \qquad \frac{\partial U}{\partial q_n} = 0$$

qui impliquent que U est maximum ou minimum. La stabilité de cet équilibre implique, en outre, d'autres conditions.

1° Si le système est soumis *aux seules forces dérivant de* U, il faut et il suffit que U *soit maximum* pour que l'équilibre soit *stable*.

2° Si l'on fait agir, en plus des forces précédentes, des forces dissipatives quelconques, il faut et il suffit encore pour la stabilité que U soit maximum. En d'autres termes, *les forces dissipatives ne modifient pas la nature de l'équilibre.*

3° Si le système est soumis aux forces dérivant de U et à des *forces gyroscopiques*, il suffit encore que U soit maximum. Mais cela *n'est plus nécessaire*. L'équilibre peut être stable sans que U soit maximum, la stabilité étant introduite par les forces gyroscopiques.

4° Si le système est soumis à la fois à des forces conservatives, à des forces *dissipatives complètes* et à des forces gyroscopiques, il faut et il suffit encore que U soit maximum. La nature de l'équilibre est là même que lorsqu'il n'y a que des forces conservatives.

5° Si le système est soumis à la fois à des forces conservatives, à des forces gyroscopiques et à des *forces dissipatives*, *mais incomplètes*, il suffit que U soit maximum; mais ce n'est pas

nécessaire, car il peut se faire que les forces gyroscopiques rétablissent la stabilité des paramètres sur lesquels ne porte pas la dissipativité.

Il n'y a donc, en fin de compte, que *deux hypothèses possibles*, et lord Kelvin, qui avait déjà fait cette distinction, appelait *stabilité séculaire* celle qui a lieu quand on tient compte des forces dissipatives complètes. C'est la même stabilité que si le système était simplement conservatif : il faut et il suffit que U soit maximum. Il appelait *stabilité temporaire* celle qui existe sans les forces dissipatives ou peut-être avec des forces dissipatives incomplètes. Il suffit, pour que cette stabilité existe, que U soit maximum, mais cela n'est plus nécessaire.

Supposons ce dernier cas réalisé. Il ne peut l'être qu'à titre d'hypothèse, comme en mécanique rationnelle. Dans la nature, en effet, il y a toujours des frottements, c'est-à-dire des forces dissipatives. De sorte que, si l'on se trouve dans le cas de U non maximum et de l'équilibre réalisé par le moyen des forces gyroscopiques, cet équilibre sera détruit lentement et ne pourra être que temporaire. Les forces dissipatives qu'on a pu négliger pendant un certain temps, ou en première approximation, agissent tout de même et, à la longue, finissent par écarter le système de sa position d'équilibre.

L'exemple type est celui de la toupie dormante. L'observateur supposé entraîné avec des axes invariablement liés à la toupie, l'axe des z se confondant avec l'axe de rotation, observe qu'il y a équilibre au début du mouvement. Or, ici, les forces dérivent d'un potentiel $U = -gz$, et U se trouve être alors minimum, puisque le centre de gravité est le plus haut possible, et z a sa plus grande valeur. Malgré cela, grâce aux forces gyroscopiques, l'équilibre relatif existe et il est stable. Si l'on écarte un peu la toupie, elle oscille autour de sa position d'équilibre.

Mais cette stabilité n'est pas séculaire. En mécanique rationnelle, on a pu négliger le frottement du pivot, la résistance de l'air. Mais en réalité, au bout d'un certain temps, la toupie s'écarte, lentement d'abord, puis plus rapidement, de sa position d'équilibre. La vitesse de rotation diminuant, elle s'incline et tombe.

94. Application des théorèmes à l'équilibre d'une masse fluide en rotation. — Il se présente tout d'abord une difficulté dans cette application. En effet, les théories et les équations ci-dessus supposent que les systèmes dépendent d'un nombre fini de paramètres. Au point de vue physique, un liquide composé de molécules dépend aussi d'un nombre très grand, mais fini, de paramètres. Au point de vue mathématique et de la continuité, il n'en est plus ainsi. Une masse continue dépend d'un nombre infini de paramètres, d'une infinité dénombrable cependant. Par généralisation, on peut admettre avec Poincaré et lord Kelvin que les conclusions sont applicables à la limite aux masses supposées continues.

Considérons donc notre fluide en rotation. Prenons comme axe des z l'axe de rotation avec Ox_1y_1 comme axes fixes et Oxy comme axes entraînés dans la rotation et liés au corps. Par hypothèse, la masse fluide est en équilibre relatif par rapport aux axes entraînés.

Dans l'équilibre relatif, les forces dont il faut tenir compte sont :

1° Les forces d'attraction mutuelles de la forme $-\frac{m_i m_k}{r_{ik}^2}$ et dont le travail dans un déplacement virtuel est

$$-\sum \frac{m_i m_k}{r_{ik}^2}\,\delta r_{ik} = \delta\left[\sum \frac{m_i m_k}{r_{ik}}\right] = \delta W;$$

W est, à un facteur constant près, ce que nous avons appelé l'*énergie du système*. On voit que les forces d'attraction mutuelle dérivent d'une fonction de forces W.

2° La force centrifuge, en second lieu, a pour projections en un point

$$m\omega^2 x, \quad m\omega^2 y, \quad 0.$$

Elle dérive d'une fonction de forces qui, pour le système entier, s'écrit :

$$\frac{\omega^2}{2}\sum m(x^2+y^2) = \frac{1}{2}\,I\omega^2,$$

I désignant le moment d'inertie de la masse fluide par rapport à Oz.

En définitive, pour l'équilibre, les forces dérivent d'une fonction

de forces qui est

$$U = W + \frac{1}{2} I \omega^2. \tag{18}$$

Pour obtenir une position d'équilibre, il faut que les dérivées partielles soient nulles, ou que la variation de U soit nulle,

$$\delta U = 0.$$

Pour savoir si cet équilibre est stable, écartons très peu les molécules de leur position d'équilibre et étudions le mouvement relatif autour de Oz, en communiquant à ces molécules de très petites vitesses.

Mais le fait de communiquer aux particules du fluide un mouvement par rapport au système d'axes entraînés par la rotation introduit de nouvelles forces dont il faut tenir compte. Ce sont les forces centrifuges composées et les forces de viscosité ou de résistance de milieu.

Dans les petits mouvements autour de la position d'équilibre, il faudra donc tenir compte : 1° des forces conservatives qui dérivent de U; 2° des forces gyroscopiques qui sont ici les forces centrifuges composées; 3° des forces dissipatives qui sont ici les forces de viscosité provenant du glissement des molécules les unes sur les autres.

Si l'on admet que les forces dissipatives sont complètes, c'est-à-dire qu'elles agissent toujours dès que le fluide se meut, il faut et il suffit, pour que l'équilibre soit stable, que U soit maximum, c'est-à-dire que $W + \frac{1}{2} I \omega^2$ soit maximum.

Si l'on ne tient pas compte des forces dissipatives (et l'on traiterait alors un problème abstrait en dehors de la réalité), cette condition de U maximum serait suffisante, mais elle ne serait plus nécessaire. Il serait très difficile alors d'exprimer cette condition nécessaire, qui varierait d'ailleurs avec les différentes hypothèses faites, comme par exemple pour celle que fait Poincaré.

En réalité, les forces dissipatives existent toujours, mais ne peut-on pas imaginer un mouvement du système tel qu'elles n'agissent plus? Poincaré, qui a soulevé cette difficulté, indique qu'on pourrait considérer un mouvement infiniment voisin du précédent et sans glissement. Il suffirait d'admettre que le liquide

tourne tout d'une pièce et continue à tourner tout d'une pièce, en se contractant par exemple, et en tournant au temps $t + dt$ avec une vitesse angulaire $\omega + d\omega$, infiniment voisine de la précédente. Dans la réalité, jamais la contraction ne serait uniforme dans toute la masse. Il y aurait toujours des inégalités de vitesse et par conséquent des forces dissipatives.

Poincaré a fait remarquer également que, si l'on suppose le système entraîné par un système rigide comme un axe matériel solide (l'aiguille de l'expérience de Plateau), les forces dissipatives sont complètes, car tout accroissement de la vitesse de rotation produit des frottements. Mais le problème que l'on traite n'est plus celui de la figure des planètes.

Pour le problème de la figure des planètes, Poincaré suppose comme plus naturel qu'on se donne, non pas ω, mais le moment cinétique de rotation $\mu = I\omega$, qui reste constant, même dans la contraction. Il admet alors que la contraction se produit sans introduire de forces dissipatives, de la manière indiquée plus haut. Il démontre que, dans ce cas, la condition nécessaire et suffisante de la stabilité de l'équilibre, celle qui remplace la condition générale de lord Kelvin, est que l'expression suivante soit maximum :

$$W - \frac{\mu^2}{2I} = W - \frac{1}{2} I \omega^2. \tag{19}$$

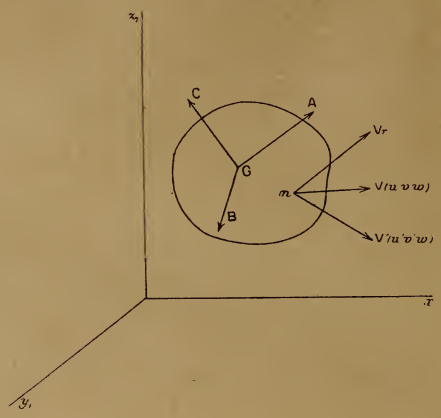
Nous allons démontrer auparavant, avec Poincaré, quelques résultats généraux relatifs au mouvement d'une masse fluide qui se déforme dans son mouvement, comme c'est ici le cas.

95. **Mouvement général d'une masse fluide qui se meut et se déforme. Solide équivalent.** — Nous rapportons ce mouvement à des axes fixes. Soient m une molécule du fluide, $V(u, v, w)$ sa vitesse. Considérons un corps solide qui, à l'instant t, a la même forme que le corps liquide, qui est composé des mêmes points matériels, dont le centre de gravité a la même vitesse que celle du centre de gravité du fluide, dont le moment cinétique est le même que celui du fluide. Nous l'appellerons le solide équivalent à l'instant t. C'est le solide que l'on obtiendrait, avec le même mouvement, si l'on solidifiait le liquide, sans changement de volume à l'instant t.

Les axes d'inertie et la somme des moments des quantités de mouvement sont les mêmes pour le fluide et pour son solide équivalent à l'instant t.

Soit $V'(u', v', w')$ la vitesee de la molécule m, considérée comme

Fig. 45.



appartenant au solide équivalent. Soit enfin $V_r(u_r, v_r, w_r)$ la vitesse relative de la molécule fluide par rapport à la molécule du solide correspondant (*fig.* 45). On a

$$u_r = u - u', \qquad v_r = v - v', \qquad w_r = w - w'.$$

Désignons par T, T', T_r la demi-force vive totale du fluide, celle du solide équivalent et celle due aux vitesses relatives, nous allons démontrer que l'on a la relation

$$T = T' + T_r \tag{20}$$

ou

$$\frac{1}{2}\sum m(u^2 + v^2 + w^2)$$
$$= \frac{1}{2}\sum m(u'^2 + v'^2 + w'^2) + \frac{1}{2}\sum m(u_r^2 + v_r^2 + w_r^2).$$

Nous avons en effet

$$u = u' + u_r, \qquad v = v' + v_r, \qquad w = w' + w_r;$$

donc

$$\begin{aligned} &u^2 + v^2 + w^2 \\ &\quad = (u'^2 + v'^2 + w'^2) + (u_r^2 + v_r^2 + w_r^2) + 2(u'u_r + v'v_r + w'w_r). \end{aligned}$$

Multiplions cette relation par m et faisons la somme de toutes les relations analogues correspondant à chaque molécule, on a

$$T = T' + T_r + \Sigma m(u'u_r + v'v_r + w'w_r).$$

On démontre que le dernier terme est nul.

En effet, la vitesse du centre de gravité du fluide et du solide équivalent étant égales, on a

$$\sum \frac{mu'}{M} = \sum \frac{mu}{M}, \qquad \sum m(u - u') = 0.$$

On en déduit

$$(1) \qquad \Sigma m u_r = 0, \qquad \Sigma m v_r = 0, \qquad \Sigma m w_r = 0.$$

Écrivons également que la somme des moments des quantités de mouvement est la même pour le fluide et le solide équivalent. on a

$$\Sigma m(yw' - zv') = \Sigma(yw - zu),$$

d'où

$$\Sigma m(yw_r - zv_r) = 0$$

et

$$\Sigma m(zu_r - xw_r) = 0, \qquad \Sigma m(xv_r - yu_r) = 0.$$

Ces six conditions (1) et (2) définissent en somme, avec la conservation des masses de chaque particule, le solide équivalent.

Exprimons maintenant la vitesse d'une molécule du solide en fonction de la translation instantanée et de la rotation instantanée de ce solide. Soient a, b, c les composantes de la translation et p, q, r celles de la rotation, on a

$$u' = a + qz - ry, \qquad v' = b + rx - pz, \qquad w' = c + py - qx.$$

On tire de là

$$\begin{aligned} &u'u_r + v'v_r + w'w_r \\ &\quad = au_r + bv_r + cw_r + p(yw_r - zv_r) + q(zu_r - xw_r) + r(xv_r - yu_r); \end{aligned}$$

d'où, en faisant la sommation,

$$\begin{aligned}\Sigma m(u'u_r + v'v_r + w'w_r) \\ = a\Sigma mu_r + b\Sigma mv_r + c\Sigma mw_r + p\Sigma m(yw_r - zv_r) \\ + q\Sigma m(zu_r - xw_r) + r\Sigma m(xv_r - yu_r).\end{aligned}$$

Or le second membre est nul d'après (1) et (2), donc le premier membre aussi. On a donc $T = T' + T_r$.

Remarque. — Si le fluide se déplace tout d'une pièce, $T_r = 0$ et le solide équivalent se confond constamment avec le fluide. Réciproquement, si $T_r = 0$ pendant un temps infiniment court, c'est que pendant cet instant le fluide se déplace sans glissement intérieur, à la manière d'un solide invariable. Si T_r est nul pendant un temps fini, le fluide se déplace comme un solide pendant ce temps-là.

Ces généralités pourraient être développées et conduiraient à des propriétés intéressantes, mais la relation précédente est suffisante pour notre problème.

96. **Théorème de Poincaré sur la condition de stabilité.** — Suivant l'hypothèse spéciale que Poincaré a envisagée comme plus naturelle dans l'étude des corps célestes, nous considérons une masse fluide tournant tout d'une pièce autour de l'axe Oz. Dans ce mouvement d'ensemble, T_r est donc nul. Nous admettons que c'est le moment cinétique μ qui est donné et constant, et non la vitesse de rotation.

Pour voir si l'équilibre relatif est stable, dérangeons très peu le fluide de sa position d'équilibre. Nous obtenons un mouvement très voisin du précédent, dans lequel μ reste le même. Mais, en général, ce ne sera plus un mouvement d'ensemble. Il y aura à la fois mouvement et déformation. Soient alors, à l'instant t, OA, OB, OC les axes d'inertie du solide équivalent, A, B, C les moments d'inertie par rapport à ces axes, c'est-à-dire les moments d'inertie principaux, p, q, r les projections de la rotation instantanée sur ces axes, la force vive du solide équivalent sera

$$T' = Ap^2 + Bq^2 + Cr^2. \tag{21}$$

Dans les hypothèses faites, T' *dépend uniquement des positions*

des molécules et non de leurs vitesses, grâce à ce fait que μ reste constant.

En effet, considérons l'ensemble des positions des molécules à l'instant t, on en déduit la forme du solide équivalent et la valeur des moments d'inertie A, B, C, ainsi que les directions correspondantes des axes principaux d'inertie. D'autre part, en projetant le moment cinétique $O\mu$ sur ces axes, on obtient les quantités de mouvement correspondantes Ap, Bq, Cr, et l'on en déduit les composantes p, q, r de la vitesse de rotation.

En résumé, μ étant donné, A, B, C, p, q, r sont fonctions de la seule position des molécules, non de leurs vitesses, et T', comme W lui-même, est fonction seulement de la configuration du système.

Appliquons alors le théorème des forces vives. Dans le cas idéal où il n'y aurait pas de frottement intérieur, on aurait

$$dT = dW.$$

Mais, en réalité, il y a des frottements. Les forces dissipatives entrent en ligne de compte et il faut écrire

$$(22) \qquad dT = dW - \mathfrak{T}_e, \qquad d(T - W) < 0.$$

Mais, comme on l'a vu, il y a un cas où les forces de frottement n'interviennent pas : c'est celui où le mouvement infiniment voisin est encore une rotation d'ensemble autour du même axe avec une vitesse infiniment voisine; alors $T_r = 0$. Ainsi donc on a

$$\begin{aligned} d(T - W) &= 0 \quad \text{si } T_r = 0, \\ d(T - W) &< 0 \quad \text{si } T_r > 0. \end{aligned}$$

Comme d'ailleurs $T = T' + T_r$, il s'ensuit que l'on a

$$\begin{aligned} T' + T_r - W &= \text{const.} \quad \text{si } T_r = 0, \\ T' + T_r - W &\ \text{décroissant} \quad \text{si } T_r > 0. \end{aligned}$$

Nous allons montrer que *la condition nécessaire et suffisante pour la stabilité de l'équilibre, c'est que* T' — W *soit minimum*, dans la position considérée. Nous avons vu que T' — W ne dépend d'ailleurs que de la position des points et est analogue à une fonction de forces.

1° *La condition est suffisante.* — Considérons la position d'équilibre relatif dont nous étudions la stabilité. Soient T'_e et W_e les valeurs de T et de W dans cette position. Nous disons que si $T'_e - W_e$ est minimum l'équilibre est stable.

En effet, dans cette hypothèse, si l'on dérange infiniment peu le système, on a

$$T' - W > T'_e - W_e$$

et à plus forte raison

$$T' - W + T_r \geqq T' - W > T'_e - W_e. \tag{23}$$

Cette relation a lieu à l'instant initial où l'on produit le dérangement et à tous les instants suivants. Or, $T' + T_r - W$ va en diminuant; donc $T' - W$ ne peut pas augmenter et doit rester infiniment voisin de la valeur d'équilibre $T'_e - W_e$, et la nouvelle configuration reste infiniment voisine de la configuration d'équilibre relatif.

En d'autres termes, soient $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \ldots$ les coordonnées des molécules dans la position d'équilibre étudiée, et soient $g_1, h_1, k_1, g_2, h_2, k_2, \ldots$ les accroissements infiniment petits donnés à ces coordonnées au moment de la perturbation; ce qui donne pour les nouvelles coordonnées de ces molécules

$$\begin{array}{lll} x_1 + g_1, & y_1 + h_1, & z_1 + k_1, \\ x_2 + g_2, & y_2 + h_2, & z_2 + k_2. \end{array}$$

On aura alors, puisque $T' - W$ est une fonction de la configuration du système,

$$T' - W = T'_e - W_e + f(g_1, h_1, k_1, g_2, h_2, k_2, \ldots);$$

f est fonction des petits écarts; comme par hypothèse on a ici un minimum, les premières dérivées sont nulles et l'on a une forme quadratique qui doit rester très petite, d'après les inégalités (23). La configuration envisagée est donc stable.

2° *La condition est nécessaire.* — Nous allons montrer que, si $T'_e - W_e$ n'est pas minimum, l'équilibre n'est pas stable.

En effet, si $T'_e - W_e$ n'est pas minimum, on peut trouver une configuration voisine telle que l'on ait

$$T' - W < T'_e - W_e.$$

On peut même faire en sorte que l'on ait

$$T' - W + T_r < T'_e - W_e.$$

Il suffit pour cela de donner aux molécules, très peu écartées, des vitesses relatives assez faibles pour que T_r reste assez petit.

Cette inégalité ayant lieu à l'instant initial de la perturbation, on sait qu'à partir de là $T' + T_r - W$ décroît. Mais il peut décroître indéfiniment, car ici aucune inégalité ne vient limiter cette décroissance et $T' - W$ s'écartera de plus en plus de $T'_e - W_e$. Si T_r ne tend pas vers o, alors $T' - W$ décroît plus rapidement et la configuration s'écarte complètement de celle d'où l'on est parti. Même si T_r tend vers o et si $T' - W$, en décroissant, tend vers une limite, cette limite sera à coup sûr différente de $T'_e - W_e$, puisque $T' - W$ a décru tout le temps. Le système pourra atteindre ainsi une autre position d'équilibre, mais non revenir à la position initiale, laquelle est donc bien instable.

Ainsi, la condition nécessaire et suffisante de la stabilité de l'équilibre, c'est que $T' - W$ soit minimum dans la position considérée. Or, dans la position d'équilibre, on a

$$T' = \frac{1}{2} I \omega^2 = \frac{1}{2} \frac{\mu^2}{I}.$$

La condition trouvée peut donc aussi s'exprimer en disant que $\frac{1}{2}\frac{\mu^2}{I} - W$ doit être minimum, ou encore que $W - \frac{1}{2}\frac{\mu^2}{I}$ doit être maximum, condition nécessaire et suffisante, dans l'hypothèse en question.

En résumé, dans l'hypothèse de lord Kelvin, si l'on suppose que le fluide ne puisse pas prendre de configuration voisine sans qu'il s'introduise de frottements, forces dissipatives, la condition nécessaire et suffisante pour la stabilité de l'équilibre est que $W + \frac{1}{2} I \omega^2$ soit maximum. On peut considérer alors la vitesse de rotation ω comme donnée.

Dans l'hypothèse de Poincaré, au contraire, si l'on suppose que le fluide puisse prendre une configuration voisine de l'équilibre, sans qu'il s'introduise de frottements, la condition ci-dessus, qui est toujours suffisante, n'est plus nécessaire. L'équilibre

peut être stable même sans cela. La condition nécessaire et suffisante est alors que $W - \frac{1}{2}\frac{\mu^2}{I}$ soit maximum.

Si la condition de lord Kelvin est vérifiée, puisqu'elle est suffisante, l'équilibre est nécessairement stable et la condition de Poincaré doit être également vérifiée. Mais la réciproque n'est pas vraie. Autrement dit, si $W + \frac{1}{2}I\omega^2$ est maximum, $W - \frac{1}{2}\frac{\mu^2}{I}$ l'est aussi; mais si $W - \frac{1}{2}\frac{\mu^2}{I}$ est maximum, cela ne prouve pas que $W + \frac{1}{2}I\omega^2$ le soit.

En effet, supposons la condition de lord Kelvin réalisée; on aura, en désignant par l'indice e les valeurs d'équilibre relatif qui donnent le maximum

$$W + \frac{1}{2}I\omega^2 < W_e + \frac{1}{2}I_e\omega^2.$$

Je dis qu'il est impossible qu'on ait en même temps

$$W - \frac{1}{2}\frac{\mu^2}{I} > W_e - \frac{1}{2}\frac{\mu^2}{I_e},$$

c'est-à-dire comme $\mu = I_e\omega$

$$W - \frac{1}{2}\frac{I_e^2\omega^2}{I} > \quad W_e - \frac{1}{2}I_e\omega^2$$

ou

$$-W + \frac{1}{2}\frac{I_e^2\omega^2}{I} < -W_e + \frac{1}{2}I_e\omega^2.$$

En effet, ajoutons cette dernière inégalité à la première, il vient

$$\frac{1}{2}\omega^2\left(I + \frac{I_e^2}{I}\right) < \frac{1}{2}\omega^2(2I_e) \qquad \text{ou} \qquad (I - I_e)^2 < 0,$$

résultat absurde. L'inégalité de lord Kelvin entraîne donc celle de Poincaré.

On voit, d'ailleurs, que la limite donnée par Poincaré est plus basse que celle de lord Kelvin.

97. **Représentation graphique des courbes d'équilibre. Systèmes à un paramètre.** — Nous allons étudier maintenant, en appliquant les principes généraux qui viennent d'être démontrés, la stabilité

de l'équilibre d'un système dont la configuration dépend d'un seul paramètre. Nous considérerons des séries linéaires de positions d'équilibre dépendant elles-mêmes d'un paramètre variable, et nous suivrons ces séries linéaires, en nous attachant à connaître la nature de la stabilité de chaque position.

Voici comment nous arrivons à définir de tels systèmes. Nous supposons que l'équilibre d'un système à une seule coordonnée q existe et est stable quand une certaine fonction $U(q, \lambda)$ contenant un paramètre λ est maximum. Cette fonction, d'ailleurs, n'est pas nécessairement une fonction de forces. Si λ est donné, la connaissance de q détermine la configuration du système.

La condition d'équilibre s'écrira

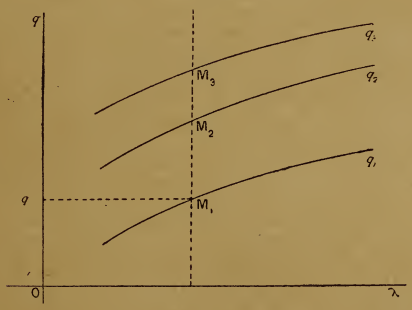
$$\frac{dU}{dq} = 0.$$

Nous poserons

$$(24) \qquad \frac{dU}{dq} = f(q, \lambda), \qquad \text{d'où} \qquad f(q, \lambda) = 0.$$

C'est cette équation qu'il faudra résoudre pour avoir q, c'est-à-dire

Fig. 46.



pour avoir la valeur de la variable q donnant une position d'équilibre. A chaque valeur de λ correspondent, en général, plusieurs valeurs de q. Si λ varie à partir d'une valeur λ_0 déterminée, pour laquelle on a k valeurs de q données par l'équation (24), ces k valeurs varieront d'une façon continue, à partir de leurs valeurs

initiales, et nous aurons ainsi une ou plusieurs branches de valeurs, qui seront des courbes représentatives des positions d'équilibre (*fig.* 46).

On peut, en effet, représenter graphiquement les résultats en prenant deux axes $O\lambda$ et Oq et en construisant la courbe $f(q, \lambda) = 0$. Cette courbe nous représente la variation que doit subir le paramètre q quand λ varie, pour que l'équilibre subsiste. Chaque valeur de q déterminera une courbe distincte et, pour une même valeur λ_0 de λ, nous aurons autant de points M et de configurations d'équilibre qu'il y aura de valeurs q correspondantes.

Faisons croître λ à partir de λ_0 et, partant de la valeur correspondante q_1 de q, dont le point représentatif est M_1, suivons la courbe que décrit M_1. Cette courbe est continue, au moins aussi longtemps que la dérivée existe. Or, la dérivée $\frac{dq}{d\lambda}$ est donnée par la formule

$$\frac{\partial f}{\partial q}\frac{dq}{d\lambda} + \frac{\partial f}{\partial \lambda} = 0.$$

Donc cette dérivée existe et est unique tant que l'on aura $\frac{\partial f}{\partial q} \neq 0$, et l'on pourra suivre parfaitement le déplacement du point M_1, dont chaque position déterminera une position d'équilibre.

Que faut-il pour que le point M_1 soit représentatif d'un *équilibre stable?* Il faut que U soit maximum, c'est-à-dire que l'on ait

$$\frac{\partial^2 U}{\partial q^2} < 0.$$

Or, nous pouvons écrire

$$\frac{\partial^2 U}{\partial q^2} = \alpha. \tag{25}$$

Si l'on a en ce point $\alpha < 0$, l'équilibre est stable. Il est instable si $\alpha > 0$; c'est pourquoi nous appellerons α *coefficient de stabilité.*

Tant que le coefficient de stabilité ne s'annule pas, la dérivée $\frac{dq}{d\lambda}$ existe et l'on peut suivre la courbe de M_1 sans qu'il se présente de difficulté. De plus, la stabilité ne varie pas tant que $\frac{dq}{d\lambda}$ existe, car α_1 garde alors un signe constant et ne s'annule pas. Il n'en est plus de même quand $\frac{dq}{d\lambda}$ s'annule, car alors la tangente à la courbe

de M_1 devient verticale, ou bien il y a un point double. Nous examinerons ces cas particuliers plus loin.

Cherchons comment on peut déterminer sur le graphique si le point M correspond à un équilibre stable ou à un équilibre instable. La courbe $f(q, \lambda) = 0$ partage le plan en deux ou plusieurs régions dans lesquelles la fonction $f(q, \lambda)$ prend les signes $+$ ou $-$. Nous conviendrons de couvrir de *hachures* les régions où $f(q, \lambda)$ est *négative*. Considérons seulement une branche de la courbe, dans une portion du plan où ne passe aucune autre branche (*fig.* 47).

Fig. 47.

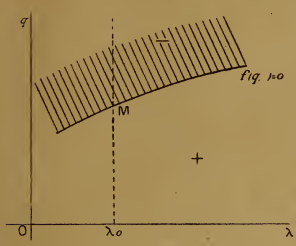
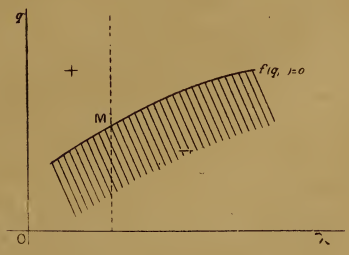


Fig. 47 *bis*.



Si la fonction $f(q, \lambda)$ a le signe $+$ au-dessous de la branche de courbe considérée, elle aura au-dessus le signe $-$. Considérons le point figuratif M, qui correspond sur cette branche à la valeur λ_0 du paramètre, et menons la droite $\lambda_0 M$. Si l'on suit cette droite dans le sens des q croissants, on voit que la fonction $f(q, \lambda)$, d'abord positive, s'annule sur la courbe, puis devient négative. Donc $f(q, \lambda)$ décroît quand q croît; on a donc en ce point M

$$\frac{\partial f}{\partial q} < 0, \qquad \text{donc} \qquad \alpha = \frac{\partial^2 U}{\partial q^2} < 0,$$

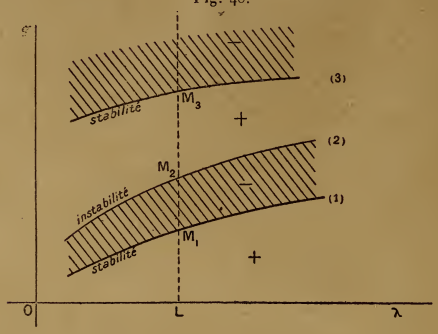
et l'équilibre est stable en M et le long de la courbe qu'il décrit.

Dans la situation de la figure 47 *bis*, si la région négative est au-dessous, la courbe est une courbe d'équilibre instable.

Supposons maintenant que nous ayons plusieurs courbes d'équilibre dans le plan. Supposons que $f(q, \lambda)$ soit positif entre la première courbe et l'axe des λ, alors cette fonction sera négative entre la courbe M_1 et la courbe M_2, positive entre M_2 et M_3, et ainsi de suite (*fig.* 48).

Déplaçons-nous dans le sens de q croissant sur la droite $LM_1M_2M_3\ldots$, on voit que M_1 sera un point représentatif d'une

Fig. 48.



position d'équilibre stable, M_2 d'équilibre instable, M_3 d'équilibre stable de nouveau, et ainsi de suite.

Ainsi la branche (1) et toutes les branches impaires seront des branches d'équilibre stable. La branche (2) et toutes les branches paires seront des branches d'équilibre instable. Cela aura lieu tant que $\frac{\partial f}{\partial q}$ restera différent de zéro sur chacune de ces branches.

98. **Cas particuliers. Points limites et points doubles.** — Considérons la courbe $f(q, \lambda) = 0$; si, en un point, f'_q s'annule, alors que f'_λ reste fini et différent de zéro, la courbe en ce point a une tangente verticale. Si $f'_q = 0$ et $f'_\lambda = 0$, le point est un point singulier et nous nous bornerons, dans ce cas, à l'étude du point double.

1° *Tangente verticale.* — Supposons $f'_q = 0$ et $f'_\lambda \neq 0$ pour une certaine valeur λ_0 de λ. En ce point M_0, on aura une tangente verticale à la courbe $f(q, \lambda)$. Dans ces conditions, prenons $\lambda < \lambda_0$; si la courbe a la disposition indiquée par la figure 49, on obtient deux valeurs de q au voisinage de M_0, c'est-à-dire deux positions d'équilibre dont les points figuratifs sont M et M'. Quand λ tend vers λ_0, ces deux positions tendent simultanément vers M_0 et,

quand $\lambda > \lambda_0$, ces deux valeurs de q deviennent imaginaires conju-

Fig. 49.

guées. Cette configuration représentée par le point M_0 est une configuration ou une *figure d'équilibre limite*.

Au point de vue de la stabilité, si $f(q, \lambda)$ est positif à droite de la courbe et négatif à gauche, nous aurons stabilité en M et sur toute la portion inférieure de la courbe; instabilité en M′ et sur toute la portion supérieure de la courbe.

Ainsi, dans ce cas de figure, la branche MM_0 est stable, la branche M_0M' est instable. Suivons la courbe d'une façon continue, en partant de M par exemple, et en nous déplaçant dans le sens des λ croissants, nous rencontrons des points figuratifs d'équilibre stable jusqu'en M_0; mais, à partir de ce point, il faut revenir vers les λ décroissants, pour continuer à suivre la courbe, et de plus tous les points sont des points d'équilibre instable.

Ainsi donc, *au passage d'un point limite, la stabilité se change en instabilité et réciproquement.*

2° *Point double.* — Supposons à la fois $f'_q = 0$ et $f'_\lambda = 0$, c'est-à-dire

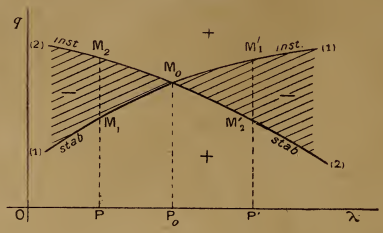
$$(26) \qquad \alpha = \frac{\partial^2 U}{\partial q^2} = 0 \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial^2 U}{\partial q\ \lambda} = 0.$$

Pour les valeurs λ_0 et q_0, pour lesquelles sont vérifiées ces deux équations, on a généralement un point double. Nous supposerons qu'il en est bien ainsi (*fig.* 49 *bis*).

Soit donc λ_0 la valeur qui vérifie à la fois ces deux équations, et désignons par (1) et (2) les deux branches de la courbe. Pour rester sur la courbe (1) en traversant le point double, il suffira de

prendre pour critérium la continuité de la tangente. Enfin, nous supposerons que les signes de $f(q, \lambda)$ dans les diverses zones sont celles indiquées sur la figure.

Fig. 49 *bis*.



Prenons d'abord $\lambda < \lambda_0$. Il correspond à chaque valeur de λ deux positions d'équilibre M_1 et M_2. En M_1 il y a stabilité et en M_2 instabilité. Quand λ se rapproche de λ_0, alors M_1 et M_2 se rapprochent de M_0 et viennent s'y confondre. Quand λ continue à croître et dépasse λ_0, nous retrouvons encore deux positions d'équilibre, dont M'_1 et M'_2 sont les points représentatifs. Mais actuellement la branche de courbe (1), et par conséquent le point M'_1, est au-dessus de la courbe (2) et du point M'_2. En M'_1 il y a maintenant instabilité et en M'_2 stabilité.

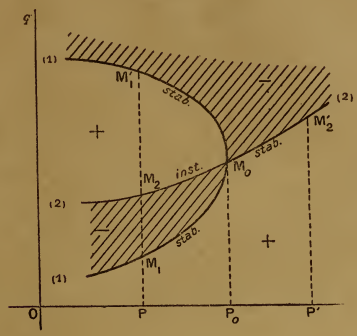
On dit, dans ce cas, que le point M_0 est un *point de croisement* ou de *bifurcation*. On voit donc qu'en un point de bifurcation *deux figures d'équilibre se confondent*, dont l'une est stable et l'autre instable. On voit de plus qu'*au point de croisement les stabilités s'échangent*, comme au point limite, avec cette différence que λ continue à croître. En suivant une même branche de courbe, la figure d'équilibre devient instable si elle était stable, et inversement.

3° *Tangente verticale et point double.* — Il y a un cas plus particulier et remarquable, parce qu'il se présente dans la théorie de l'équilibre d'une masse fluide : c'est celui où l'une des tangentes au point double est verticale.

Nous nous plaçons dans le cas représenté par la figure 50. Pour $\lambda < \lambda_0$, il y a trois figures d'équilibre M_1, M'_1 et M_2. Après λ_0 pour

$\lambda > \lambda_0$. M_1 et M'_1 s'évanouissent. Il ne reste plus que M'_2. En M_0 viennent se confondre trois positions d'équilibre, quand λ croît,

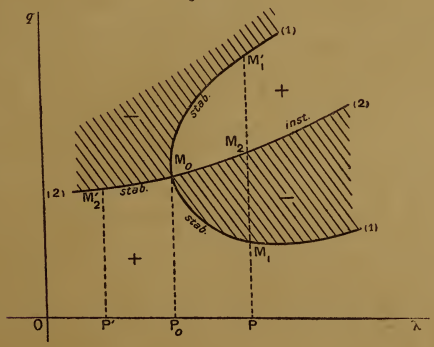
Fig. 50.



dans le cas de la figure. Ce point est *à la fois un point de croisement et un point limite.*

En désignant par (1) la branche qui admet une tangente verti-

Fig. 50 *bis.*



cale et par (2) la branche qui traverse la précédente, on voit que, dans le cas de la figure, la branche (1) donne des positions d'équilibre qui sont toujours stables, au-dessus comme au-dessous du

point M_0. La branche (2) donne des figures d'équilibre instables avant M_0 et stables après. L'instabilité se change en stabilité, comme dans le second cas.

D'une façon générale, la nature de la stabilité ne change pas sur la courbe à tangente verticale. La stabilité change de nature au point double sur la courbe qui traverse. La nature de la stabilité sur la courbe à tangente verticale est la même que dans la partie de l'autre courbe qui n'est pas comprise entre ses branches.

L'échange des stabilités n'a donc lieu que sur la branche simple. On pourrait continuer la discussion et considérer des points triples, etc. Les cas que nous venons d'envisager suffiront pour la suite de cette étude.

99. **Application au mouvement d'un point sur un cercle tournant.** — Nous allons traiter un problème élémentaire de mécanique rationnelle, en nous plaçant aux divers points de vue développés ici, avec les divers cas particuliers.

Soit un cercle qui tourne avec une certaine vitesse angulaire autour de son diamètre vertical. Un point M_1 assujetti à rester sur ce cercle y glisse sans frottement. On se propose de chercher, en fonction de la vitesse angulaire de rotation, les positions d'équilibre, et d'étudier leur stabilité.

La fonction dont dérive la force appliquée au point matériel est

$$U = mgz + \frac{1}{2} m\omega^2 y^2;$$

en prenant l'angle θ pour la coordonnée qui définit la position du mobile (*fig.* 51), on peut l'écrire

$$U = mgR\cos\theta + \frac{1}{2} m\omega^2 R^2 \sin^2\theta = m\omega^2 R^2 \left(\lambda\cos\theta + \frac{1}{2}\sin^2\theta\right)$$

en posant

$$\lambda = \frac{g}{\omega^2 R}.$$

La position du système dépend de θ; le paramètre λ varie avec la vitesse de rotation ω.

Les positions d'équilibre sont données par l'équation

$$\frac{dU}{d\theta} = 0 \qquad \text{ou} \qquad U' = \sin\theta(\cos\theta - \lambda) = 0.$$

Quand λ varie d'une façon continue, on obtient des séries linéaires de position d'équilibre.

Construisons la courbe correspondant à l'équation d'équilibre. Elle comprend d'abord les droites $\theta = 0$ et $\theta = \pm k\pi$, qui sont parallèles à l'axe horizontal, et la sinusoïde $\lambda = \cos\theta$, qui serpente

Fig. 51.

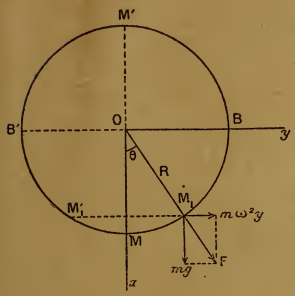
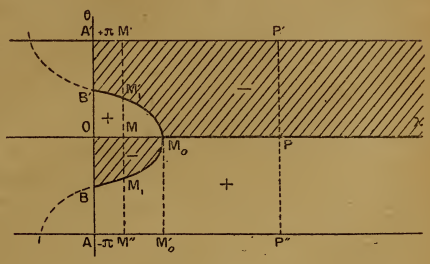


Fig. 51 *bis*.



autour de l'axe vertical (*fig.* 51 *bis*). Ne considérons que la partie comprise entre $-\pi$ et $+\pi$, et marquons de hachures les régions où U' est négative.

Nous remarquons que λ est essentiellement positif, d'après sa valeur indiquée plus haut; par conséquent, il part de 0 et peut d'ailleurs augmenter indéfiniment. Pour $\lambda = 1$, nous aurons un point double avec tangente verticale au point M_0.

Lorsque λ est très grand, c'est-à-dire ω très petit, il n'y a que deux positions d'équilibre P et P', car P'' n'est autre chose que P'. P correspond à $\theta = 0$ et P' à $\theta = \pi$. La position P est stable et P' est instable. Il en est ainsi aussi longtemps que $\lambda > 1$. Ce sont les deux extrémités M et M' du diamètre vertical du cercle O (*fig.* 51). La position M est stable.

Lorsqu'on a $0 < \lambda < 1$, il y a quatre positions d'équilibre M_1, M'_1, M, M'; alors M et M' sont des positions d'équilibre instable, tandis que M_1 et M'_1 sont des positions d'équilibre stable. Ce sont les mêmes points sur le cercle O. La position M est devenue instable.

Quand λ diminue, c'est-à-dire quand ω augmente, θ tend

vers $\frac{\pi}{2}$ et les positions d'équilibre stable M_1 et M'_1 tendent vers B et B′ situés sur le diamètre perpendiculaire à l'axe de rotation.

La position $\lambda = 1$ est à la fois une position limite et une position de bifurcation. En ce point, les positions M, M_1, M'_1 sont confondues en M_0, et c'est une position d'équilibre stable. On voit que, conformément à la théorie générale, la stabilité est de même nature sur la sinusoïde et sur la partie de l'axe des λ extérieure à la sinusoïde.

100. **Système à n variables dépendant d'un paramètre.** — Considérons un paramètre λ. Soit $U(q_1, q_2, \ldots, q_n, \lambda)$ une fonction de n coordonnées et de ce paramètre, telle que le système est en équilibre stable quand elle est maximum. Les conditions d'équilibre sont alors

$$(27) \qquad \frac{\partial U}{\partial q_1} = 0, \qquad \frac{\partial U}{\partial q_2} = 0, \qquad \ldots, \qquad \frac{\partial U}{\partial q_n} = 0.$$

De ce système d'équations on tirera la valeur des n coordonnées du système pour lesquelles l'équilibre a lieu. On obtient d'ailleurs ces valeurs en fonction de λ. Quand λ varie, ces valeurs varient également et l'on obtient, en suivant une même série de déterminations des paramètres q, une série linéaire de positions d'équilibre.

Nous poserons pour les solutions du système (27)

$$(28) \qquad q_1 = \varphi_1(\lambda), \qquad q_2 = \varphi_2(\lambda), \qquad \ldots, \qquad q_n = \varphi_n(\lambda).$$

Ces équations représentent une branche de courbe dans l'espace à $n + 1$ dimensions. Nous pourrons suivre cette branche de courbe quand λ variera, et les diverses positions du point variable M de cette courbe représenteront des positions d'équilibre. Partons d'une position d'équilibre stable par exemple, correspondant à une certaine valeur de λ, nous n'éprouverons aucune difficulté pour la détermination de la nature de l'équilibre tant que certains éléments ne s'annulent pas.

Dérivons par rapport à λ le système (27), il vient

$$(29)\quad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial^2 U}{\partial q_1^2}\dfrac{dq_1}{d\lambda} + \dfrac{\partial^2 U}{\partial q_1\,\partial q_2}\dfrac{dq_2}{d\lambda} + \ldots + \dfrac{\partial^2 U}{\partial q_1\,\partial q_n}\dfrac{dq_n}{d\lambda} + \dfrac{\partial^2 U}{\partial q_1\,\partial\lambda} = 0, \\ \dfrac{\partial^2 U}{\partial q_2\,\partial q_1}\dfrac{dq_1}{d\lambda} + \dfrac{\partial^2 U}{\partial q_2^2}\dfrac{dq_2}{d\lambda} + \ldots + \dfrac{\partial^2 U}{\partial q_2\,\partial q_n}\dfrac{dq_n}{d\lambda} + \dfrac{\partial^2 U}{\partial q_2\,\partial\lambda} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \dfrac{\partial^2 U}{\partial q_n\,\partial q_1}\dfrac{dq_1}{d\lambda} + \dfrac{\partial^2 U}{\partial q_n\,\partial q_2}\dfrac{dq_2}{d\lambda} + \ldots + \dfrac{\partial^2 U}{\partial q_n^2}\dfrac{dq_n}{d\lambda} + \dfrac{\partial^2 U}{\partial q_n\,\partial\lambda} = 0. \end{array}\right.$$

De ce système (29), on tirera sans ambiguïté les valeurs de

$$\frac{dq_1}{d\lambda},\quad \frac{dq_2}{d\lambda},\quad \ldots,\quad \frac{dq_n}{d\lambda},$$

à moins que le déterminant de leurs coefficients ne soit nul :

$$(30)\qquad \Delta = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 U}{\partial q_1^2} & \dfrac{\partial^2 U}{\partial q_1\,\partial q_2} & \ldots & \dfrac{\partial^2 U}{\partial q_1\,\partial q_n} \\ \dfrac{\partial^2 U}{\partial q_2\,\partial q_1} & \dfrac{\partial^2 U}{\partial q_2^2} & \ldots & \dfrac{\partial^2 U}{\partial q_2\,\partial q_n} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ \dfrac{\partial^2 U}{\partial q_n\,\partial q_1} & \dfrac{\partial^2 U}{\partial q_n\,\partial q_1} & \ldots & \dfrac{\partial^2 U}{\partial q_n^2} \end{vmatrix}.$$

Ce déterminant Δ est le déterminant fonctionnel des dérivées premières, considérées comme fonction des paramètres q. En posant, pour abréger l'écriture,

$$a_{ik} = \frac{\partial^2 U}{\partial q_i\,\partial q_k},$$

on a

$$\Delta = |a_{ik}|.$$

Tant que Δ est différent de 0, nous obtenons pour les $\dfrac{dq_i}{d\lambda}$ des valeurs bien déterminées, et nous pouvons suivre par continuité sur la courbe la série des positions d'équilibre. Mais si pour une certaine valeur $\lambda = \lambda_0$ on a $\Delta = 0$, on se trouve alors dans un cas singulier. Nous supposerons, comme dans le cas d'un seul paramètre, que ce point singulier est du premier ordre, c'est-à-dire que, pour cette valeur, les mineurs de Δ ne sont pas tous nuls. Nous supposerons par exemple que le mineur $\dfrac{\partial\Delta}{\partial a_{11}}$ au moins est différent de 0.

Quelle est alors la condition pour que U soit maximum ?

Considérons une position d'équilibre où les paramètres q ont des valeurs, fonctions de λ, et connues. Considérons une position infiniment voisine et soient

$$q_1 + h_1, \quad q_2 + h_2, \quad \ldots, \quad q_n + h_n$$

les nouvelles coordonnées du système. On aura pour la nouvelle valeur de U

$$\begin{aligned} &U(q_1 + h_1, q_2 + h_2, \ldots, q_n + h_n) \\ &\quad = U + \frac{1}{1.2} h_1^2 \frac{\partial^2 U}{\partial q_1^2} + h_1 h_2 \frac{\partial^2 U}{\partial q_1 \partial q_2} + \ldots + H \\ &\quad = U + \frac{1}{2} \sum a_{ik} h_i h_k + H. \end{aligned}$$

Les termes du premier degré en $h_1, h_2, \ldots, h_n$ ont disparu, car on a ici dans la position d'équilibre

$$\frac{\partial U}{\partial q_1} = 0, \qquad \frac{\partial U}{\partial q_2} = 0, \qquad \ldots, \qquad \frac{\partial U}{\partial q_n} = 0.$$

H contient les termes d'ordre supérieur au second. Pour que la fonction

$$U(q_1, q_2, \ldots, q_n)$$

soit maximum, il faut et il suffit que la forme quadratique

$$\Sigma a_{ik} h_i h_k$$

soit définie et négative.

Faisons le changement de variables

$$(31) \qquad \left\{ \begin{array}{l} h_1 = c_{11} k_1 + c_{12} k_2 + \ldots + c_{1n} k_n, \\ h_2 = c_{21} k_1 + c_{22} k_2 + \ldots + c_{2n} k_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ h_n = c_{n1} k_1 + c_{n2} k_2 + \ldots + c_{nn} k_n. \end{array} \right.$$

Les nouvelles coordonnées du système seront $k_1, k_2, \ldots, k_n$. Soit $D = |c_{ik}|$ le déterminant de cette substitution. Nous pouvons réduire, par une substitution appropriée, la forme quadratique à une somme de carrés et cela d'une infinité de manières, de façon

à avoir

$$(32) \qquad \Sigma a_{ik} h_i h_k = \alpha_1 k_1^2 + \alpha_2 k_2^2 + \ldots + \alpha_n k_n^2.$$

Le discriminant de la nouvelle forme est égal au discriminant de l'ancienne multipliée par le carré du déterminant de la substitution

$$(33) \qquad \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n = \Delta D^2.$$

On voit que le produit des α ne peut s'annuler que si Δ s'annule et réciproquement, et que le signe du produit est le même que le signe de Δ. Ainsi Δ ne change de signe que si l'un des α s'annule.

Poincaré appelle pour cela les α *les coefficients de stabilité* du système. Pour que l'équilibre soit stable, il faut, comme nous l'avons vu, que $\Sigma a_{ik} h_i h_k$ soit une forme définie négative. Pour cela, il faut et il suffit que tous les α soient négatifs.

Dès que l'un des α devient positif, il y a instabilité, car en déplaçant le système de façon que k_1 par exemple seul ne soit pas nul, si α_1 est positif, dans ce déplacement la forme quadratique $\Sigma a_{ik} h_i h_k$ sera positive et l'équilibre instable. Si un seul des coefficients est positif, il y a instabilité du premier degré. Si deux coefficients sont positifs, l'instabilité est du second degré et ainsi de suite.

101. Réduction au cas d'une variable à un paramètre. — Pour étudier comment se succèdent les positions d'équilibre stable et instable, quand on suit par continuité une série de positions d'équilibre, Poincaré a ramené le cas général au cas d'une variable et d'un paramètre, de la façon suivante.

Dans la discussion du numéro précédent, nous avons tiré les valeurs des paramètres q en fonction de λ, du système (27) qui définit l'équilibre

$$(34) \qquad \frac{\partial U}{\partial q_1} = 0, \qquad \frac{\partial U}{\partial q_2} = 0, \qquad \ldots, \qquad \frac{\partial U}{\partial q_n} = 0.$$

Nous allons maintenant procéder autrement. Des $n+1$ dernières équations précédentes, nous tirons $q_2, q_3 \ldots, q_n$ en fonction de q_1 et de λ. Pour que cela soit possible, il faut et il suffit que

soit différent de o le déterminant fonctionnel suivant :

$$(33)\qquad \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 U}{\partial q_2^2} & \frac{\partial^2 U}{\partial q_2 \partial q_3} & \cdots & \frac{\partial^2 U}{\partial q_2 \partial q_n} \\ \frac{\partial^2 U}{\partial q_3 \partial q_2} & \frac{\partial^2 U}{\partial q_3^2} & \cdots & \frac{\partial^2 U}{\partial q_3 \partial q_n} \\ \cdots\cdots & \cdots & \cdots & \cdots\cdots \\ \frac{\partial^2 U}{\partial q_n \partial q_2} & \frac{\partial^2 U}{\partial q_n \partial q_2} & \cdots & \frac{\partial^2 U}{\partial q_n^2} \end{vmatrix} = \frac{\partial \Delta}{\partial a_{11}}.$$

Or ce déterminant n'est autre que $\frac{\partial \Delta}{\partial a_{11}}$, et nous avons supposé que cette expression n'est pas nulle dans la position d'équilibre étudiée, pour $\lambda = \lambda_0$, ni par conséquent dans un certain champ voisin.

Ainsi pour λ variant dans un certain intervalle de $\lambda_0 - l$ à $\lambda_0 + l$, nous pouvons tirer des équations (34) les valeurs des paramètres q en fonction de q_1 et de λ. Alors $U(q_1, q_2 \ldots q_n)$ deviendra $U(q, \lambda)$ et si $U(q_1, q_2 \ldots q_n, \lambda)$ est maximum en considérant $q_1, q_2 \ldots q_n$ comme des variables indépendantes, en remplaçant $q_2, q_3 \ldots q_n$ par leurs valeurs en fonction de q_1 et de λ, la fonction obtenue $U(q_1, \lambda)$ sera encore maximum, et par conséquent $\frac{\partial^2 U}{\partial q_1^2}$ sera négatif. La réciproque ne serait pas vraie.

Nous pouvons raisonner maintenant sur $U(q_1, \lambda)$ comme sur une fonction à une variable et à un paramètre.

1° Calculons d'abord

$$\frac{dU}{dq_1} = \frac{\partial U}{\partial q_1} + \frac{\partial U}{\partial q_2}\frac{dq_2}{d\lambda} + \ldots + \frac{\partial U}{\partial q_n}\frac{dq_n}{d\lambda}.$$

Mais puisque $U(q_1, q_2 \ldots q_n, \lambda)$ est la valeur de U correspondant à une position d'équilibre, on a

$$(36)\qquad \frac{\partial U}{\partial q_2} = 0, \qquad \frac{\partial U}{\partial q_3} = 0, \qquad \ldots, \qquad \frac{\partial U}{\partial q_n} = 0,$$

et il vient

$$\frac{dU}{dq_1} = \frac{\partial U}{\partial q_1} = 0.$$

2° Calculons ensuite la dérivée seconde, en tenant compte

de (36),

$$f'_{q_1} = \frac{d^2 U}{dq_1^2} = \frac{\partial^2 U}{\partial q_1^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial q_1 \partial q_2}\frac{dq_2}{d\lambda} + \frac{\partial^2 U}{\partial q_1 \partial q_3}\frac{dq_3}{d\lambda} + \ldots + \frac{\partial^2 U}{\partial q_1 \partial q_n}\frac{dq_n}{d\lambda} = 0.$$

expression que nous pouvons écrire sous la forme

$$(37) \qquad -f'_{q_1} + \frac{\partial^2 U}{\partial q_1^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial q_1 \partial q_2}\frac{dq_2}{d\lambda} + \ldots + \frac{\partial^2 U}{\partial q_1 \partial q_n}\frac{dq_n}{d\lambda} = 0.$$

Écrivons de même, en les différentiant par rapport à q_1, les $n-1$ dernières équations (36), on a

$$(38) \quad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial^2 U}{\partial q_2 \partial q_1} + \dfrac{\partial^2 U}{\partial q_2^2}\dfrac{dq_2}{dq_1} + \dfrac{\partial^2 U}{\partial q_2 \partial q_3}\dfrac{dq_3}{dq_1} + \ldots + \dfrac{\partial^2 U}{\partial q_2 \partial q_n}\dfrac{dq_n}{dq_1} = 0, \\ \dfrac{\partial^2 U}{\partial q_3 \partial q_1} + \dfrac{\partial^2 U}{\partial q_3 \partial q_1}\dfrac{dq_2}{dq_1} + \dfrac{\partial^2 U}{\partial q_3^2}\dfrac{dq_3}{dq_1} + \ldots + \dfrac{\partial^2 U}{\partial q_3 \partial q_n}\dfrac{dq_n}{dq_1} = 0. \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \dfrac{\partial^2 U}{\partial q_n \partial q_1} + \dfrac{\partial^2 U}{\partial q_n \partial q_2}\dfrac{dq_2}{dq_1} + \dfrac{\partial^2 U}{\partial q_n \partial q_3}\dfrac{dq_3}{dq_1} + \ldots + \dfrac{\partial^2 U}{\partial q_n^2}\dfrac{dq_n}{dq_1} = 0. \end{array} \right.$$

Ces n équations (37), (38) sont satisfaites par hypothèse si l'on remplace les $n-1$ quantités $\frac{dq_2}{dq_1}, \frac{\partial q_3}{\partial q_1}, \ldots, \frac{dq_n}{dq_1}$ par leurs valeurs. Le déterminant suivant est donc nul :

$$\begin{vmatrix} -f'_{q_1} + a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0.$$

Ce qui peut s'écrire

$$-f'_{q_1}\frac{\partial \Delta}{\partial a_{11}} + \Delta = 0 \qquad \text{ou} \qquad f'_{q_1}\frac{\partial \Delta}{\partial a_{11}} = \Delta.$$

Nous savons qu'avec nos hypothèses on a

$$\frac{\partial \Delta}{\partial a_{11}} \neq 0, \qquad \Delta = \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n \frac{1}{D^2}.$$

Cette relation nous instruit donc du signe de $f'_{q_1} = \frac{d^2 U}{dq_1^2}$, et nous savons que si la position $q_1, q_2, q_3, \ldots, q_n$ est stable, cette fonction doit être négative.

102. Application à la détermination des courbes de stabilité. — Nous pouvons maintenant appliquer à l'équilibre d'un système, dont la position dépend de plusieurs coordonnées, ce que nous avons dit de l'équilibre d'un système à coordonnée unique.

Considérons la courbe qui représente graphiquement dans un plan les positions d'équilibre, c'est-à-dire

$$f(q_1, \lambda) = \frac{dU}{dq_1} = 0.$$

Partons d'une position d'équilibre stable de notre système à plusieurs coordonnées. Dans ces conditions, les α sont négatifs, comme nous l'avons vu, et $\frac{d^2U}{dq_1^2}$ est négatif.

Faisons varier maintenant λ d'une façon continue. La valeur de f_{q_1} ne change pas de signe tant qu'aucun des α n'est nul. Donc le système reste stable tant que l'un des α ou que f'_{q_1} ne s'annule pas.

Si f'_{q_1} s'annule en un point pour lequel on a $\lambda = \lambda_0$ alors l'un des α et un seul s'annule. En effet, si deux des α s'annulaient, la somme (32) se réduirait à $n - 2$ carrés et par conséquent tous les mineurs s'annuleraient pour cette valeur λ_0, ce qui est contraire à l'hypothèse.

Ainsi la configuration que nous suivons et qui est stable au début reste stable aussi longtemps que f'_{q_1} ne s'annule pas, c'est-à-dire aussi longtemps que tous les α sont différents de 0.

Supposons maintenant que α_1 par exemple s'annule, tous les autres α restant négatifs.

1° Il peut y avoir une figure limite relative à $U(q_1, \lambda)$. Dans ce cas, les stabilités s'échangent sur les deux branches de la courbe plane. On voit facilement à quoi cela correspond. Au point M_0, f'_{q_1} s'annule et change de signe. Par conséquent, α_1 s'annule et *change de signe* aussi, et, dans le système à n paramètres, la stabilité fait aussi place à l'instabilité (*fig.* 49).

2° Il peut y avoir égalemsnt *un point double* de la courbe plane, c'est-à-dire de la courbe $\frac{\partial}{\partial q_1} U(q_1, \lambda) = 0$. Pour la branche (1), étant données les conditions de la figure, nous savons qu'il y a stabilité pour $\lambda < \lambda_0$ et instabilité pour $\lambda > \lambda_0$. Pour la branche (2), c'est le contraire (*fig.* 49 *bis*).

Suivons la branche (1) : notre f', d'abord négatif, s'annule au point double, puis devient positif. Par conséquent α_1 négatif d'abord, comme les autres α, s'annule et devient positif.

Suivons maintenant la branche (2). De même f' d'abord positif s'annule pour $\lambda = \lambda_0$ et devient négatif. Il faut donc nécessairement qu'un des α d'abord positif, s'annule et devienne négatif. C'est d'ailleurs le même α que précédemment, c'est-à-dire α_1, puisque pour $\lambda = \lambda_0$ un seul paramètre peut s'annuler, par hypothèse.

Pour le système correspondant à n coordonnées, cela veut dire qu'en partant d'un équilibre stable et suivant une certaine série linéaire de configurations, la stabilité est conservée jusqu'en λ_0. Si alors nous continuons à suivre la même série linéaire, nous trouvons maintenant des positions d'instabilité, car α_1 d'abord négatif est devenu positif. Mais *puisqu'il y a point double*, *on peut bifurquer* dans une autre direction où α_1 reste négatif et où l'équilibre reste stable.

3° Quand le système du plan a un *point double avec tangente verticale*, nous voyons de même que pour le système à n coordonnées on peut suivre deux séries de configurations d'équilibre. Pour des valeurs $\lambda < \lambda_0$, par exemple, on aura trois figures d'équilibre ; pour les valeurs $\lambda > \lambda_0$ on n'en aura plus qu'une. On voit alors que si l'équilibre est instable sur la courbe (2) il sera stable après, et qu'il sera stable sur toute la branche (1).

103. Application à la stabilité des figures d'équilibre d'une masse fluide. — Nous considérons le moment cinétique μ comme donné. L'équilibre sera stable si l'on a $W - \frac{1}{2}\frac{\mu^2}{I}$ maximum. Ici le paramètre dont dépendent les positions d'équilibre stable est μ.

Rappelons qu'au point de vue des dimensions, en désignant par L, M, T la masse, la longueur et le temps, on a pour les formules de dimensions

$$W = ML^2T^{-2}, \qquad I = ML^2, \qquad \mu = ML^2T^{-1}.$$

Nous allons rendre l'expression $W - \frac{1}{2}\frac{\mu^2}{I}$ indépendante du choix des unités de la façon suivante. Désignons par Θ la durée de

la révolution, par T le volume du fluide, et par M sa masse. En remplaçant W, I et μ par les expressions

$$\frac{W\theta^2}{MT^{\frac{2}{3}}}, \quad \frac{I}{MT^{\frac{2}{3}}}, \quad \frac{\mu\theta}{MT^{\frac{2}{3}}},$$

on aura des quantités indépendantes des unités choisies, c'est-à-dire de simples nombres. L'expression qui doit être maximum devient

$$\left(W - \frac{\mu^2}{2I}\right)\frac{\theta^2}{MT^{\frac{2}{3}}}.$$

C'est une expression également indépendante du choix des unités. On voit que son maximum est le même que celui de $W - \frac{1}{2}\frac{\mu^2}{I}$, mais on n'a plus à tenir compte des unités. Le nouveau paramètre qui remplace μ est alors $\lambda = \frac{\mu\theta}{MT^{\frac{2}{3}}}$. C'est à un facteur numérique près le paramètre que nous avions introduit dans l'étude des ellipsoïdes d'équilibre. En effet, on avait posé

$$k = \frac{50\mu^2}{3fM^2}\left(\frac{4\pi\rho}{3M}\right)^{\frac{2}{3}};$$

f est le coefficient de l'attraction qui a pour dimensions

$$M^{-1}L^3T^{-2}.$$

et $f\frac{\theta^2 M}{T}$ sera un nombre. Enfin $\frac{f}{M}$ a pour dimensions $\frac{1}{T}$. On a donc, au point de vue des dimensions,

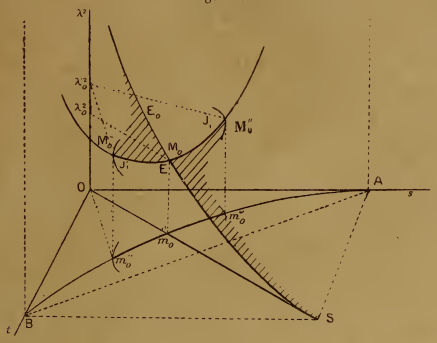
$$\sqrt{k} = K\mu\left(\frac{1}{T}\right)^{\frac{1}{6}}\mu^{-\frac{3}{2}}\frac{\theta M^{\frac{1}{2}}}{T^{\frac{1}{2}}} = K\frac{\mu\theta}{MT^{\frac{2}{3}}}.$$

$\sqrt{k}$ et λ ont donc bien les mêmes dimensions : le rapport $\lambda : \sqrt{k}$ est un certain nombre abstrait K, et la variation de λ^2 est la même que celle de k.

Ces considérations nous permettent d'utiliser directement les résultats établis au début du cours dans la forme même où ils ont été établis, n° 23. La figure 52 donne en SM_0 la courbe des ellipsoïdes de Maclaurin, en M'_0, M_0, M''_0 celle des ellipsoïdes de Jacobi,

qui se projette en Am_0B sur le plan SOt. La cote des différents points représentatifs est donnée par la valeur de λ^2, qui remplace k.

Fig. 52.



Partons de $\lambda = 0$, nous avons une masse fluide immobile et la figure stable est la *sphère*, car pour la sphère W est un maximum absolu, point S.

Donnons à λ des valeurs croissantes, μ augmente et aucun des coefficients de stabilité ne s'annule tant que nous ne trouvons pas une figure de bifurcation. Les figures d'équilibre sont donc stables et nous savons que ce sont des *ellipsoïdes de Maclaurin*.

Si λ continue à croître, le point figuratif monte sur la courbe depuis S jusqu'en E ou M_0. Nous savons en effet que la première figure de bifurcation qu'on rencontre est précisément E, ellipsoïde d'équilibre commun aux Maclaurin et aux Jacobi.

A ce moment, un des coefficients s'annule. Nous savons que le point E est un point limite pour la courbe des Jacobi, mais non pour celle des Maclaurin. Si donc nous continuons à suivre la branche des Maclaurin, le coefficient qui s'annule devient négatif et l'équilibre instable sur $M_0 E_0$. Mais, si nous bifurquons, cet α redeviendra positif sur les deux branches des *ellipsoïdes de Jacobi*, où l'équilibre sera stable sur $M_0 M'_0$ et sur $M_0 M''_0$. Nous sommes en effet dans le cas d'un point double avec tangente à la branche des Jacobi, perpendiculaire à l'axe $O\lambda$. Comme les deux branches de la courbe des Jacobi sont réelles pour des valeurs $\lambda > \lambda_0$

(λ_0 correspondant à E), nous savons que ces deux branches correspondent à des ellipsoïdes stables.

Suivons donc maintenant la courbe des ellipsoïdes de Jacobi. Nous aurons encore des figures stables tant qu'aucun des coefficients α ne s'annule, c'est-à-dire jusqu'à ce que nous rencontrions une nouvelle figure de bifurcation, E_1 ou E'_1.

La première figure que l'on rencontre est celle du jacobien critique E_1 d'où dérivent les *figures piriformes*. Soit λ'_0 la valeur du paramètre en ce point. Que se passera-t-il si l'on continue à faire croître λ? De E à E_1 les jacobiens étaient stables. Si l'on continue sur cette courbe, on trouvera des jacobiens instables. Il semble donc que pour continuer à trouver des figures stables, il suffise de bifurquer sur la courbe des figures piriformes. Remarquons que cette courbe a un point limite pour E_1, et se compose dans le voisinage de deux courbes symétriques, parce que la figure infiniment voisine du jacobien critique peut être piriforme par le haut ou par le bas, comme on l'a vu. C'est donc sur cette courbe que se portera la stabilité, si elle existe. Il faut pour cela que les branches de cette courbe soient au-dessus de E_1, c'est-à-dire qu'elles soient réelles pour $\lambda < \lambda'_0$. Elles seront stables seulement si ces courbes sont situées au-dessus du plan mené par E_1 perpendiculairement à $O\lambda$. Elles ne seront pas stables dans le cas contraire.

104. **Instabilité de la figure piriforme.** — On a vu au n° 96 un théorème de Poincaré d'après lequel la condition nécessaire pour l'équilibre stable est que l'expression $W - \frac{1}{2}\frac{\mu^2}{I}$ soit maximum. Mais cette condition exige que la déformation ait lieu sans frottement, sans forces dissipatives. Or, dans la transformation d'un ellipsoïde en un autre ellipsoïde, comme pour le passage des ellipsoïdes de Maclaurin à ceux de Jacobi, avec l'ellipsoïde de bifurcation E, cette condition peut se trouver réalisée.

En effet, il suffit de concevoir que toutes les couches moléculaires, parallèles à l'un des plans principaux, se contractent ou se dilatent uniformément et normalement à ce plan. La figure reste ellipsoïdale et les molécules subissent toutes une translation proportionnelle à leur distance à ce plan et qui n'introduit aucun déplacement relatif des points voisins, et par conséquent, aucun

frottement. Soit par exemple un ellipsoïde d'axes a, b, c. Multiplions toutes les distances au plan bc par $\frac{a'}{a}$, celles au plan ac par $\frac{b'}{b}$, celles au plan ab par $\frac{c'}{c}$, avec la condition $a'b'c' = abc$ qui conserve le volume. Nous avons réalisé un nouvel ellipsoïde d'axes a', b', c', toujours homogène, de même volume et de même densité, sans aucun glissement de molécules l'une sur l'autre.

Schwarzschild (*Die Poincaresche Theorie des Gleichgewichts Annalen der K. Sternwarte*, München, Bd 3, 1898) a fait remarquer que la condition ci-dessus, déterminée par Poincaré, ne s'appliquait plus aux figures voisines des ellipsoïdes, comme la figure piriforme, où la déformation introduit nécessairement des glissements et des frottements. Le maximum de $W - \frac{1}{2}\frac{\mu^2}{I}$ n'était plus un criterium suffisant. Schwarzschild montre que la figure stable sera celle dont le moment d'inertie sera le plus grand.

Poincaré reconnaît le bien-fondé de cette critique, et, dans un important Mémoire *Sur la stabilité de l'équilibre des figures piriformes affectées par une masse fluide en rotation* (*Phil. trans. of the Royal Soc. of London*, t. 198, 1901) il reprend la question pour cette figure particulière. Par une méthode remarquable, basée sur l'expression de l'énergie d'une double couche, il va jusqu'à la deuxième approximation pour la forme de la surface et en déduit la condition nécessaire et suffisante pour la stabilité. Il s'agit de déterminer le signe d'une série dont deux termes seulement sont négatifs, et Poincaré donne tous les éléments du calcul.

G.-H. Darwin, qui déjà s'était occupé des jacobiens depuis 1887, et qui venait de publier un Mémoire sur la traduction des fonctions de Lamé, pour les adapter aux calculs numériques et pratiques, applique alors sa méthode au calcul exact de la figure piriforme, et, l'année suivante, sur les conseils de Poincaré, aborde l'étude de la stabilité de cette figure. Il traduit les notations de Poincaré suivant sa méthode, pousse le calcul assez loin et en conclut que la figure piriforme est stable. Du moins il lui paraît impossible que le résidu non calculé puisse changer les résultats.

Le très important Mémoire de Liapounoff sur la stabilité des figures ellipsoïdales d'un liquide animé d'un mouvement de rotation (1884), écrit en russe, ne fut connu qu'en 1904 par la tra-

duction de Davaux dans les *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*. A la demande de Tchebytchef, il avait recherché s'il n'y avait pas d'autres ellipsoïdes de bifurcation analogues à l'ellipsoïde de Maclaurin, qui devient la souche des ellipsoïdes de Jacobi, Il avait abouti aux mêmes résultats que Poincaré, et vers la même époque. Il reprend ces questions en 1905, dans une étude générale résumée dans son Mémoire *Sur un problème de Tchebytchef*. Il démontre alors que la figure piriforme $n = 3$ est instable et que des deux figures, positives et négatives, obtenues pour $n = 4$, la négative est stable et la positive instable.

Il démontre que la figure d'équilibre est stable ou instable, suivant que l'expression

$$\Pi = \frac{M_0}{I} - \frac{1}{2\pi}\int\int\frac{d\tau\, d\tau'}{r}$$

est minimum ou non pour cette figure. Dans cette expression, la densité est 1, l'intégrale double est étendue à tous les éléments $d\tau$ et $d\tau'$ du volume fluide, associés deux à deux et situés à la distance r l'un de l'autre, M_0 est la constante

$$\frac{\mu^2}{2\pi f} = \frac{\omega^2 I^2}{2\pi f},$$

I désignant le moment d'inertie par rapport à l'axe de rotation. Cette expression est, en somme, l'analogue de celle de Poincaré, et la remplace pour les figures non ellipsoïdales. M. Liapounoff a consacré tout un Mémoire à la recherche du minimum de Π. Faisant en particulier les calculs numériques pour la figure piriforme, il trouve que Π n'est pas minimum et que la figure est instable.

A la suite de ces travaux, G.-H. Darwin reprend ses calculs et retrouve le même résultat relatif à la stabilité de la figure piriforme. En 1910, Ladislas Bénès refait tous les calculs indiqués par Poincaré, en partant des mêmes formules, mais sans pouvoir pousser jusqu'au bout les calculs numériques, ni trancher définitivement la question. Cependant il croit pouvoir affirmer, d'après l'allure des résultats, que la figure piriforme, est instable. En 1911, Poincaré disait encore dans ses *Leçons sur les hypothèses cosmogoniques*, p. 189 : « La figure piriforme avons-nous dit, est peut-être stable, mais il n'est pas certain qu'elle le soit réellement, Sir G.-H. Darwin a trouvé que cette figure est stable, mais d'après

M. Liapounoff elle serait instable. Pour trancher la question, il faudrait recommencer le calcul. Or, ce calcul est extrêmement pénible. »

C'est J.-H. Jeans qui a tranché définitivement la question et conclu à l'instabilité. Ce résultat, annoncé et résumé dans *The Observatory*, p. 199, 1916, est publié dans les *Mémoires of the Roy. Astr. Soc.* (t. 62, 1917). Il reprend les calculs de Darwin en utilisant le second criterium de Poincaré et celui de Schwarzschild sur la variation du moment d'inertie I, pour la détermination de la nature de l'équilibre au point de bifurcation. En première approximation, I reste constant et la ligne de bifurcation reste horizontale. En deuxième approximation, la ligne de bifurcation est parabolique, mais il y a une infinité de paraboles répondant à l'équilibre au point de bifurcation. La solution n'est donc pas déterminée si l'on se contente du second ordre. Darwin a calculé l'une de ces paraboles, mais seulement une, et qui conduisait à un équilibre stable. Jeans pousse donc les calculs jusqu'à la troisième approximation. On voit alors qu'il n'y a qu'une parabole bien déterminée relative aux conditions d'équilibre. Le moment d'inertie correspondant à ces conditions est décroissant et la figure piriforme est instable [1].

En ce point critique, les deux figures possibles théoriquement, jacobien et piriforme, deviennent donc instables au même degré, instabilité du premier degré. Toutefois, la déformation de la figure d'équilibre, en bifurquant vers les piriformes, introduit des frottements et des forces dissipatives, qui font obstacle à la stabilité supplémentaire, que pourraient introduire la rotation et les forces gyroscopiques. En suivant la série des ellipsoïdes de Jacobi, au contraire, il ne s'introduit pas de frottements. Comme toute autre forme de la surface introduirait des frottements, qui mettraient obstacle par le fait même à la déformation, l'équilibre, quoique instable théoriquement, pourra se maintenir jusqu'au prochain point critique. Pour $n = 4$, on aura deux figures d'équilibre dont l'une est stable et l'autre instable. La stabilité abandonnera donc définitivement la série des Jacobi en ce point E_1. Les véritables

---

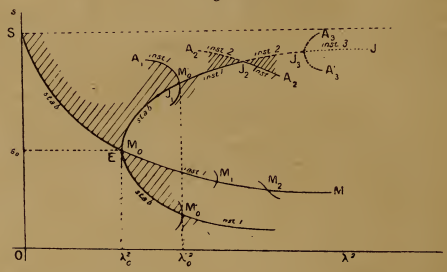
[1] On pourra également consulter au sujet du calcul de Darwin une Note de M. Pierre Humbert (*Comptes rendus*, t. 170, p. 13).

bifurcations de stabilité auraient donc lieu pour $n = 2$ et pour $n = 4$, en E et en E_2, seulement pour les valeurs paires de n.

105. **Représentation graphique générale de la stabilité des figures d'équilibre.** — Pour appliquer d'une façon plus directe les conclusions établies au n° 98 par la représentation graphique des courbes d'équilibre, prenons la projection des courbes de la figure précédente sur le plan $sO\lambda^2$, en prenant l'axe λ^2 ou k comme axe des x et l'axe Os comme axe des y. Nous obtenons les courbes de la figure 53.

Pour $\lambda = 0$ on a $s = 1$ et le point S représentatif de la sphère.

Fig. 53.



La courbe SM_0M_1 représente la courbe des Maclaurin. La courbe EM'_0M_0 représente celle des Jacobi. Les courbes des figures de bifurcation viendront couper celles-ci ou s'y greffer.

Les ellipsoïdes d'équilibre de Maclaurin ou de Jacobi peuvent être regardés comme des figures d'équilibre à un seul paramètre. La condition d'équilibre étudiée au n° 97 est

$$f(q, \lambda) = \frac{dU}{dq} = 0.$$

Elle peut être remplacée ici par la formule (69) des Jacobi, étudiée au n° 23, qui donne k ou λ^2 en fonction de s et t

$$f(q, \lambda) = f(s, k) = \frac{(s+t)^2}{(st)^{\frac{1}{2}}} \int_0^\infty \frac{x(1+x)\,dx}{\Delta^3} - k = 0,$$

où t est défini comme fonction de s par la relation $t = s$ pour les Maclaurin, et pour les Jacobi par la relation

$$(1 - s - t)\int_0^\infty \frac{x\,dx}{\Delta^3} - st\int_0^\infty \frac{x^2\,dx}{\Delta^3} = 0, \qquad \Delta^2 = (1 + x)(1 + sx)(1 + tx);$$

l'expression $f'_1(s, k)$ est donc fonction seulement de s et de k. Ici k, qui contient le moment de rotation, joue le rôle du paramètre λ et s joue le rôle de la variable q.

Pour $s = t = t_0$ on a, comme on l'a vu, un minimum de k. La courbe des Jacobi, au voisinage de E ou M_0, a sa concavité dirigée vers les λ croissants et la stabilité est conservée, d'après la discussion des courbes de stabilité; la représentation graphique étant ici exactement la même.

Les autres points critiques sont donnés par l'équation

$$F_n = \frac{R_k S_k}{2n + 1} - \frac{R_1 S_1}{3} = 0.$$

Pour les Maclaurin, il faut ajouter la condition $R_2 = R_3$, et pour les Jacobi

$$F_2 = \frac{R_4 S_4}{5} - \frac{R_1 S_1}{3} = 0.$$

Dans ce dernier cas, les R_k et les S_k n'ont qu'une seule valeur pour chaque valeur de n.

Chaque F_n définira donc une courbe, qui coupera celle des Jacobi au point correspondant à l'ellipsoïde critique. Cette courbe dépendra d'un paramètre q dont la valeur s'identifiera avec celle de s en ce point. On aura autant de paramètres $q_1, q_2, \ldots, q_n$ et autant de courbes qu'il y a d'ellipsoïdes critiques, c'est-à-dire un nombre infini. L'équation F_n détermine la position de chacune des courbes d'équilibre par rapport à la courbe des Jacobi ou des Maclaurin au voisinage des points critiques. On peut donc appliquer directement les résultats étudiés plus haut.

Pour la figure piriforme où $n = 3$, et pour tous les n impairs, on obtient deux figures symétriques et identiques, par rapport au jacobien correspondant. On a donc une courbe formée de deux branches paraboliques ayant leur sommet et une tangente verticale au point critique et tournées toutes deux du même côté comme en M'. En effet, autour du point critique, on obtient la

même figure piriforme et la même valeur pour tous les éléments de variation pour deux valeurs symétriques $\pm \varepsilon$ du paramètre qui détermine la déformation. Dans le cas de $n = 3$, on sait que les branches sont tournées du côté des λ décroissants. Il y avait stabilité sur la courbe $M_0 M'_0$. Il y a instabilité du premier degré sur les trois autres branches parties de M'_0, pour les jacobiens et pour les figures piriformes. On a marqué sur la courbe l'instabilité du premier degré en traits pleins et fins. Le point correspondant M'_0 donne les mêmes résultats que M'_0.

Pour $n = 4$ et pour tous les n pairs, on obtient deux figures différentes pour deux valeurs symétriques $\pm \varepsilon$ du paramètre. La valeur du moment d'inertie I, et des autres éléments, passe de la valeur $I + \delta I$ à $I - \delta I$ en traversant le point critique. La courbe représentative A_2, J_2, A'_2 coupe celle des Jacobi sous un certain angle, sans revenir en arrière. Il y a simplement échange des stabilités. Le coefficient de stabilité α_1 des Jacobi devenu positif en J_1, reste toujours positif. Le second coefficient α_2 s'annule et devient positif en J_2. La branche des Jacobi, instable du premier degré entre J_1 et J_2, devient instable du second degré en J_2. La branche $J_2 A'_2$ de la nouvelle figure d'équilibre conserve le même degré de stabilité ou d'instabilité que la branche $J_1 J_2$, instable du premier degré. L'autre $J_2 A_2$ prend un nouveau degré d'instabilité. Le coefficient de stabilité est commun aux deux courbes. Il s'annule et change de signe pour les deux. L'une des nouvelles figures de bifurcation est stable, *par rapport à l'ellipsoïde de bifurcation*, et l'autre instable. C'est bien le résultat trouvé par Liapounoff.

Pour $n = 5$, on a le point J_3. Les Jacobi prennent une instabilité du troisième degré. Les figures d'équilibre voisines conservent l'instabilité du deuxième degré si leur courbe représentative est orientée comme sur la figure, ou prennent la même instabilité du troisième degré si elles sont orientées comme celles de la figure piriforme. Ce dernier résultat est plus probable, car la déformation est du même genre pour $n = 5$.

On aura des résultats analogues sur la courbe des Maclaurin où $n = 3$ donnera un ellipsoïde de révolution creusé par trois fuseaux, soit M_1, et $n = 4$ avec $p = 0$ donnera deux figures, dont l'une correspondra à l'expérience de Plateau, soit M_2, point critique analogue à E_2 des Jacobi.

A chaque point critique, l'un des coefficients de stabilité s'annule, par conséquent le degré d'instabilité des Maclaurin et des Jacobi augmente chaque fois d'une unité. A la limite, le disque aplati ou l'aiguille allongée sont infiniment instables. Mais l'aplatissement progressif de ces ellipsoïdes peut se faire de façon régulière sans introduire de frottements ni de forces dissipatives, comme on l'a vu. D'ailleurs, on peut toujours admettre que, malgré l'instabilité de cet équilibre, les conditions étant rigoureusement conservées, cet équilibre se conserve assez pour que l'évolution se poursuive.

La déformation est alors limitée dans le cas des figures impaires et des figures paires négatives par le fait que la valeur de ζ, intérieure à l'ellipsoïde, ne peut pas dépasser la longueur du plus petit rayon de courbure. Pour les figures positives, au contraire, on peut augmenter la valeur de ζ et du creusement intérieur, et admettre que les équations s'appliquent encore, au moins approximativement. Alors, pour $n = 4$, on aboutirait finalement à la formation de l'anneau de Plateau pour l'ellipsoïde de révolution de Maclaurin. Le second ellipsoïde critique de Jacobi aboutirait de même à la formation de deux satellites symétriques d'un astre central plus volumineux. On aurait un système triple au lieu du système double qu'aurait dû donner la figure piriforme. Il est peu probable, toutefois, que les satellites et les étoiles multiples se soient constitués ainsi par formation centrifuge, car les distances actuelles sont trop considérables pour s'expliquer à partir d'astres qui auraient été primitivement au contact.

106. **Stabilité ordinaire ou temporaire des figures d'équilibre.** — Dans toutes les démonstrations ci-dessus, il s'agit de la stabilité séculaire des figures d'équilibre, stabilité qui subsisterait même dans le cas de frottement et de forces dissipatives. H. Poincaré a abordé également, dans son Mémoire des *Acta mathematica*, l'étude de la stabilité ordinaire des ellipsoïdes de Maclaurin et de Jacobi, en la ramenant à l'étude de leurs petits mouvements fondamentaux. C'est la stabilité qui ne subsisterait que temporairement, s'il s'introduisait des frottements.

H. Poincaré a montré que pour les ellipsoïdes de révolution de Maclaurin, la stabilité ordinaire persiste encore après la bifurca-

tion des Jacobi à trois axes, pour des ellipsoïdes plus aplatis, alors que la stabilité séculaire passe aux ellipsoïdes de Jacobi. Riemann avait montré déjà [1], dans l'hypothèse restreinte où la masse conservait une forme ellipsoïdale dans la déformation, que la stabilité ordinaire se maintenait jusqu'à ce que l'applatissement des ellipsoïdes de révolution atteignît la limite 0,697.

Après l'étude de Poincaré, M. Bryan [2], en étudiant en détail les petits mouvements des ellipsoïdes de Maclaurin, regardait comme très probable la validité générale de la limite donnée par Riemann, mais sans pouvoir en donner une démonstration rigoureuse. Tout récemment M. E. Cartan a réussi à donner cette démonstration dans un Mémoire du *Bulletin des Sciences mathématiques*, t. 46, 1922, p. 332-342.

Pour les ellipsoïdes à trois axes, H. Poincaré s'était contenté de déclarer, comme probable, que la stabilité ordinaire s'étendait également au delà de l'ellipsoïde de bifurcation de la figure piriforme, où cesse leur stabilité séculaire.

M. E. Cartan dans un nouveau Mémoire a montré au contraire que la stabilité ordinaire des ellipsoïdes de Jacobi cesse en même temps que leur stabilité séculaire à la figure piriforme. Il montre que ceci résulte d'un théorème plus général et assez curieux : Pour les figures d'équilibre d'ordre n impair la stabilité ordinaire cesse en même temps que la stabilité séculaire. C'est le cas de la figure piriforme ou ovoïde $n = 3$. Dans le cas de n pair, la stabilité ordinaire subsiste encore un certain temps après qu'a cessé la stabilité séculaire.

107. **Figures annulaires. L'anneau de Saturne. Masses indéfinies. Le cylindre elliptique.** — Poincaré a étudié, au point de vue de l'équilibre, les trois hypothèses que l'on peut faire sur l'anneau de Saturne : anneau solide, ou liquide, ou composé de particules solides. Le calcul s'accorde avec les données de l'observation pour conclure que la troisième hypothèse, hypothèse de Cassini, peut seule cadrer avec la réalité. (*Figures d'équilibre d'une masse fluide*, Chap. VIII.)

---

(1) *Göttingen, Abhanlungen*, t. 9, 1860, p. 3.
(2) *Phil. Trans.*, t. 180, 1888, p. 187.

Laplace est le premier qui ait examiné l'hypothèse d'un anneau solide. Il a montré que si l'anneau était homogène son équilibre serait instable. Dès que le centre de l'anneau ne coïnciderait plus avec le centre de la planète, l'attraction de Saturne tendrait à augmenter l'écart. L'anneau tomberait sur la planète.

Il faut donc que l'anneau présente des irrégularités. Maxwell a fait ce calcul. Il a montré, en admettant une seule masse supplémentaire, qu'il fallait y concentrer les quatre cinquièmes de sa masse pour le rendre stable. Il faudrait en somme le transformer en un satellite, dont l'anneau serait un appendice.

Radau a examiné le cas où la densité varierait d'une façon continue d'un point à un autre. Il faudrait qu'elle varie de 2,7 à 0,04 ou de 67 à 1, ce qui semble invraisemblable.

De plus, la section de l'anneau étant mince, il lui faudrait une grande résistance pour résister à l'attraction des satellites. Hirn a calculé qu'il lui faudrait une résistance 1000 fois supérieure à celle de l'acier. L'anneau de Saturne ne peut pas être solide.

Laplace a fait le calcul du potentiel et de la formule générale de la surface d'équilibre dans le cas d'un anneau fluide. Il a étudié le cas d'une section circulaire ou elliptique, mais sans discuter complètement l'équation.

Mme Kovalewski qui a fait cette discussion a montré que la section ne pouvait pas être ellipsoïdale ni symétrique par rapport à un axe parallèle à l'axe de rotation.

Maxwell est le premier qui ait soumis au calcul l'hypothèse de Cassini, et montré que c'est la seule qui réponde aux conditions mécaniques de l'équilibre. L'observation confirme d'ailleurs également bien l'hypothèse, car l'anneau est transparent et la lumière le traverse sans trace de réfraction. Il faut donc supposer qu'il est composé de corpuscules isolés les uns des autres. Les observations spectroscopiques montrent d'ailleurs que la vitesse d'une molécule de l'anneau n'est pas la même sur le bord interne que sur le bord externe.

Maxwell montre que le mouvement de perturbation se transmet d'un corpuscule à un autre avec un certain retard, à la façon d'une onde. Pour que ces ondes n'amplifient pas indéfiniment une perturbation, il faut que la masse ne dépasse pas une certaine limite qu'il calcule. On peut en déduire la densité limite de l'anneau, connaissant ses dimensions. Cette densité exigée pour la stabilité

de l'équilibre est la même dans le cas d'un liquide et des corpuscules solides. Il faut que cette densité soit plus petite que 1 : 300. Aucun liquide connu ne peut remplir cette condition.

D'ailleurs dans le cas de l'anneau liquide il faut que la pression à la surface soit dirigée vers l'intérieur. Or Laplace avait déjà montré, qu'en admettant deux anneaux à section elliptique, la densité aurait dû être supérieure à $\frac{1}{2}$ pour l'anneau extérieur et à 2 pour l'anneau extérieur. Il y aurait incompatibilité avec la limite de Maxwell.

Poincaré avait démontré que la vitesse de rotation, dans le cas d'une masse homogène et quelle que soit la forme, ne peut pas dépasser une limite donnée par la formule du n° 17 :

$$h = \frac{\omega^2}{2\pi f \rho} < 1, \qquad \omega^2 < 2\pi f \rho.$$

Il en déduit, pour l'anneau de Saturne, supposé liquide et quelle que soit la section de l'anneau, que sa densité doit être supérieure à 1 : 16, pour qu'il y ait équilibre. Cette limite est encore incompatible avec celle de Maxwell et l'anneau de Saturne ne peut pas être liquide.

Remarque. — L'attraction d'une masse indéfinie n'a pas de sens défini en général. Mais, si la masse affecte la forme d'un cylindre indéfini homogène, on montre que l'attraction a un sens défini et peut se calculer. De là, le problème purement mathématique, sans application à la cosmogonie, de la recherche des figures d'équilibre d'une masse liquide homogène indéfinie, affectant la forme d'un cylindre, qui tourne uniformément autour d'un axe fixe parallèle aux génératrices.

Le problème d'ailleurs se simplifie beaucoup et se ramène à l'étude de l'équilibre d'une section plane normale aux génératrices du cylindre et par conséquent à un problème à deux dimensions.

Parmi les figures possibles, on trouve le cylindre circulaire quand $\pi f \rho < \omega^2 < 2\pi f \rho$, et le cylindre elliptique quand $\omega^2 < \pi f \rho$.

M. Jeans, puis Globa-Mikhaïlenko ont publié d'intéressants travaux sur les figures d'équilibre possibles, et notamment sur la recherche des figures cylindriques elliptiques de bifurcation au sens de H. Poincaré.

CHAPITRE IX.

FIGURES D'ÉQUILIBRE D'UNE MASSE LIQUIDE HOMOGÈNE EN ROTATION ET SOUMISE A LA TENSION SUPERFICIELLE.

108. **Historique de la question.** — La question étudiée dans les chapitres précédents conduisait à la détermination de la figure des planètes et à l'évolution de leur forme avec l'accroissement de la vitesse de rotation. L'étude de ces formes avait même conduit de grands esprits à envisager l'hypothèse qu'une masse en rotation pouvait se fractionner en plusieurs parties et à voir là, après H. Poincaré, un moyen d'expliquer la formation des planètes à partir du Soleil, ou des satellites par leur planète (Darwin) ou des étoiles doubles (Jeans). Nous avons vu que les calculs poussés plus loin ne permettent pas d'envisager le fractionnement d'une masse homogène.

Cependant l'expérience célèbre de Plateau, au moyen d'une sphère d'huile tournant dans un liquide de même densité, avait abouti à la formation d'un anneau détaché de la masse centrale par la force centrifuge, et qui se fractionnait lui-même en parties plus petites. On y a vu l'image de la formation des planètes et des satellites et la justification expérimentale de la célèbre hypothèse de Laplace.

Il faut dire tout de suite que l'hypothèse et l'expérience en question n'ont absolument aucun rapport entre elles. Dans l'hypothèse de Laplace, et dans la réalité, la forme des corps en rotation dépend uniquement de l'attraction mutuelle de leurs parties. Dans l'expérience physique au contraire, l'attraction est complètement négligeable, et la forme dépend uniquement de la tension superficielle, et non des forces internes.

Néanmoins l'expérience de Plateau posait un problème mathématique intéressant, et qui se rattache étroitement à celui qui a été étudié dans les premiers chapitres. A l'instigation de P. Appell il a été entrepris par M. Globa-Mikhaïlenko, repris par M. Boussinesq, puis, sur les conseils de ce dernier, par M. A. Charrueau, qui en a fait l'étude complète, étendue au cas des figures annulaires et de la stabilité.

M. Globa-Mikgaïlenko a donné la forme générale de la courbe méridienne, en exprimant son ordonnée à l'aide d'une certaine intégrale hyperelliptique. Puis il a donné une discussion générale du problème et intégré l'équation du méridien, au moyen des fonctions elliptiques, dans un cas particulier très important. Mais il n'a pas poussé l'étude de ce cas jusqu'à la détermination de la forme d'une masse liquide, de densité et de volume donnés, soumise à une rotation donnée.

M. Boussinesq, en reprenant le problème, a montré l'importance qu'il y avait à introduire la considération de la masse, du volume et des données physiques, qui permettaient seules de déterminer les dimensions des figures, en même temps que leur forme. Il a donné du problème un énoncé simple et indépendant de la théorie générale de M. Globa-Mikhaïlenko et une solution par développements en séries, applicables pour certaines valeurs des données.

M. A. Charrueau, dans un premier travail, a réussi à donner la solution complète du problème et de l'évolution des figures d'équilibre, quelles que soient les données physiques, avec le seul secours des intégrales elliptiques, mais cela seulement jusqu'à la transformation de la masse en anneau. Sur les conseils et indications de M. A. Véronnet, et dans un second travail, qui a fait l'objet d'une Thèse, il a étendu ces résultats aux figures annulaires elles-mêmes, avec application à l'expérience de Plateau.

Le présent chapitre est extrait de l'excellente thèse de M. Charrueau. L'ensemble des travaux relatifs à la question est indiqué à la fin de la Bibliographie.

109. **Équation de l'équilibre de la surface libre.** — Nous considérons une masse liquide homogène et incompressible tournant autour d'un axe avec une vitesse angulaire constante, et soumise seulement à la force centrifuge et à la tension superficielle. Il s'agit

de déterminer la forme extérieure qu'elle prendra sous l'action d'une vitesse de rotation donnée et quelconque.

Prenons l'axe de rotation pour axe des y et une perpendiculaire à cet axe pour axe des x. Les figures étudiées seront de ré olution autour de Oy, et symétriques par rapport à un plan équatorial normal à cet axe. La section méridienne sera symétrique par rapport aux deux axes, et il suffira d'étudier la forme de la portion de courbe située dans le premier quadrant.

Soient ρ la densité, ω la vitesse angulaire, p la pression en un point intérieur, p_0 la pression constante sur l'axe de rotation. A l'intérieur de la masse les particules sont soumises à la seule force centrifuge, qui dérive du potentiel $\frac{1}{2}\omega^2(x^2+z^2)$. La formule générale de l'équilibre hydrostatique (48) (Chap. III) s'écrit

$$(1) \qquad p = p_0 + \frac{1}{2}\rho\,\omega^2(x^2+z^2).$$

Les surfaces d'égale pression sont des cylindres de révolution autour de l'axe définis par $r^2 = x^2+z^2$. On pourra ne considérer que la section méridienne et faire $z = 0$.

Sur la surface libre, il faut ajouter le potentiel dû à la tension superficielle f, et la pression interne p devra équilibrer en outre la pression extérieure p_1, que nous supposons partout constante. On aura

$$(2) \qquad p_1 = p_0 + \frac{1}{2}\rho\omega^2 x^2 + f\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right),$$

R est le rayon de courbure du méridien, R′ l'autre rayon de courbure principale de la surface, le centre de courbure correspondant se trouvant sur l'axe de révolution.

Cette équation définit l'équilibre de la surface, en fonction des forces et des données, ρ, f, p_1, ω.

110. Équation différentielle du méridien. — Il faut exprimer les rayons de courbures R, R′ en fonctions des coordonnées x, y.

On a les formules

$$(3) \qquad \frac{1}{R} = \frac{y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{d}{dx}\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}, \qquad \frac{1}{R'} = \frac{y'}{x\sqrt{1+y'^2}}.$$

Faisant la somme de ces deux valeurs et la portant dans (2) il vient

$$(4)\qquad \pm\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\frac{xy'}{\sqrt{1+y'^2}} = \frac{p_0-p_1}{f} + \frac{\rho\omega^2}{2f}x^2.$$

On multiplie par x et l'on intègre, d'où

$$(5)\qquad \pm\frac{xy'}{\sqrt{1+y'^2}} = \frac{p_0-p_1}{2f}x^2 + \frac{\rho\omega^2}{8f}x^4 + C.$$

Pour les masses non annulaires, qui sont coupées par l'axe de rotation, la constante C est nulle. En effet sur cet axe $x = 0$, l'expression en y' n'est jamais infinie, et il faut $C = 0$. Il vient alors en divisant par x, et prenant le signe — devant y', signe qui convient dans le premier quadrant, où $y' < 0$, pour ω faible, il vient

$$(6)\qquad \frac{-y'}{\sqrt{1+y'^2}} = \frac{p_0-p_1}{2f}x + \frac{\rho\omega^2}{8f}x^3.$$

Sur l'axe de rotation on a $x = 0$, d'où $y' = 0$. La tangente au méridien est normal à l'axe de rotation, pour les deux points situés sur cet axe. Pour les figures non annulaires d'équilibre la surface coupe toujours normalement l'axe de rotation.

Désignons par a le rayon équatorial, à l'extrémité de ce rayon, pour $x = a$, la tangente au méridien est normale à Ox; $y' = -\infty$ et (6) nous donne

$$(7)\qquad \frac{p_0-p_1}{2f}a + \frac{\rho\omega^2}{8f}a^3 = 1, \qquad \frac{p_0-p_1}{2f} = \frac{1}{a}\left(1 - \frac{\rho\omega^2 a^3}{8f}\right).$$

Cette relation permet d'éliminer les pressions p_0, p_1, et (6) devient

$$(8)\qquad \frac{-y'}{\sqrt{1+y'^2}} = \left(1 - \frac{\rho\omega^2 a^3}{8f}\right)\frac{x}{a} + \frac{\rho\omega^2}{8f}x^3 = \psi(x).$$

On en déduit immédiatement l'équation différentielle de la courbe méridienne

$$(9)\qquad y' = \frac{-\psi(x)}{\sqrt{1-\psi^2(x)}}, \qquad dy = -\frac{\psi(x)\,dx}{\sqrt{1-\psi^2(x)}}.$$

111. Forme générale de la courbe méridienne. — Nous pouvons faire sur (8) une *remarque fondamentale*, c'est que y' peut

s'exprimer en fonction de x, au moyen d'un *seul paramètre*, que nous désignerons par h, et qui contient toutes les autres données ρ, ω, a, f. On a en effet,

$$(10) \qquad h = \frac{\rho\omega^2 a^3}{8f}, \qquad \psi(x) = \left(1 - h + h\frac{x^2}{a^2}\right)\frac{x}{a}.$$

Il suffira donc de donner à h toutes les valeurs compatibles avec (8), pour obtenir toutes les figures d'équilibre de la masse liquide.

Pour $h = 0$, on a $\omega = 0$, la figure d'équilibre est une sphère.

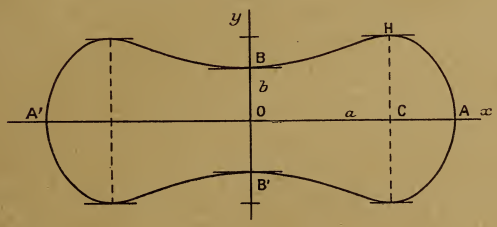
On a vu (8) que sur l'axe, pour $x = 0$, on avait toujours $y' = 0$, et la tangente au méridien normale à l'axe Oy. Pour $h \leqq 1$, il n'y a pas d'autre racine de $\psi(x)$, ni de y', pour x compris entre 0 et a. La tangente y' décroît régulièrement de 0 à $-\infty$ de l'axe de rotation au cercle équatorial. La section méridienne et la surface libre sont partout convexes.

Pour $h > 1$ il y a une autre racine x_1 de $\psi(x)$ et de y' entre 0 et a,

$$(11) \qquad \frac{x^2}{a^2} = \frac{h-1}{h}, \qquad x = x_1, \qquad y' = 0.$$

Autour de l'axe de rotation pour $x < x_1$ on a $y' > 0$ d'après (8)

Fig. 54.



la surface est creusée et concave, partie BH. Elle redevient convexe pour $x > x_1$, en HA (*fig.* 54).

La figure se creuse de plus en plus, quand h croît, devient annulaire pour $h = 2,32$. Au delà, les équations ci-dessus ne conviennent plus au problème. Il faudra considérer les équations

relatives aux figures annulaires, où la constante C de (5) n'est plus nulle et où nous retrouverons également le paramètre h.

De plus le dénominateur de (9) s'annule toujours pour $\psi(x) = 1$, c'est-à-dire $x = a$, où l'on a $y' = -\infty$. Or on voit facilement qu'on a toujours, en dehors de cette valeur, $\psi(x) < 1$, pour $h < 4$. La tangente y' ne prendra pas d'autre valeur infinie dans l'intervalle considéré $h \leqq 2,32$.

L'équation (9) définira parfaitement la courbe méridienne.

112. S'il n'y a pas de pression extérieure la figure reste convexe. — L'expression (7) devient, en introduisant h,

$$p_0 - p_1 = \frac{2f}{a}(1 - h). \tag{12}$$

Il faut que p_0, la pression interne sur l'axe, soit toujours positive ou nulle. Si la pression extérieure est nulle, $p_1 = 0$, (12) montre qu'il faut avoir $h \leqq 1$. La figure reste convexe d'après la discussion précédente. Il ne peut pas y avoir d'anneaux. C'est donc l'action de la pression extérieure qui creuse la masse autour de l'axe de rotation, où la force centrifuge est la plus faible, et conduit à la formation des anneaux.

Si la pression extérieure p_1 n'est pas nulle, la condition (12) devient pour $p_0 \geqq 0$

$$p_1 \geqq \frac{2f}{a}(h - 1). \tag{13}$$

Or au pôle, pour $x = 0$, les rayons de courbures sont égaux, $R = R' = R_0$. La formule (2), d'après (7) ou (12), donne

$$\frac{1}{R_0} = \frac{p_0 - p_1}{2f} = \frac{1 - h}{a}. \tag{14}$$

Au moment de la formation des anneaux, la surface est concave au pôle, on a R_0 négatif. De plus on démontre que le rayon de courbure est égal alors à $1,27\,r$, où r est le rayon de la sphère ayant le même volume que la masse. On a donc

$$p_1 \geqq \frac{2f}{-R_0}, \qquad p_1 \geqq \frac{2f}{1,27\,r}. \tag{15}$$

Dans les expériences de Plateau, cette pression minimum, néces-

saire pour la formation des anneaux était de 0,03 gr : cm², alors que la pression atmosphérique est supérieure à 1000 gr : cm².

113. Cas d'une faible vitesse de rotation. Ellipsoïde de révolution. — Quand la vitesse de rotation est nulle, la figure d'équilibre est une sphère. Il est naturel de penser qu'ensuite on aura un ellipsoïde de révolution légèrement aplati, pour une faible vitesse de rotation.

Le rayon de courbure de la section méridienne donné par les formules (3) et (8) peut s'écrire

$$(16)\qquad \frac{1}{R} = \frac{d}{dx}\frac{-y'}{\sqrt{1+y'^2}} = \frac{d\psi}{dx} = \frac{1-h}{a} + 3\frac{\rho\omega^2}{8f}x^2.$$

D'ailleurs l'équation de l'ellipse, en appelant e l'aplatissement et négligeant e^2, donne

$$(17)\qquad \frac{-y'}{\sqrt{1+y'^2}} = \frac{1-e}{a}x + e\frac{x^3}{a^3}, \qquad e = \frac{a-b}{a}.$$

La dérivée de cette expression par rapport à x nous donne $1 : R$ d'après (16). On voit que les deux expressions s'identifient en écrivant

$$(18)\quad e = h = \frac{\rho\omega^2 a^3}{8f} = \frac{3M}{32\pi f}\omega^2, \qquad M = \frac{4}{3}\pi\rho a^2 b = \frac{4}{3}\pi\rho a^3(1-e),$$

où M est la masse totale. La courbe méridienne est donc une ellipse, dont l'aplatissement est égal au paramètre h et proportionnel à ω^2, comme dans le cas de la gravitation.

On vérifie d'ailleurs immédiatement que les deux rayons de courbure d'une ellipse, aux deux sommets des axes, $R = a^2 : b$ et $R = b^2 : a$, vérifient bien l'équation (16) pour $x = 0$ et $x = a$.

114. Intégration complète de l'équation différentielle par les fonctions elliptiques. — Faisons le changement de variables suivant dans l'expression $\psi(x)$ (8) :

$$(19)\qquad \frac{x^2}{a^2} = t, \qquad 1 - h + h\frac{x^2}{a^2} = 1 - h + ht = \varphi(t).$$

L'expression différentielle (9) devient

$$(20)\qquad dy = -\frac{a}{2}\frac{\varphi(t)\,dt}{\sqrt{1-t\,\varphi^2(t)}},\qquad \frac{y}{a} = \frac{1}{2}\int_t^1 \frac{\varphi(t)\,dt}{\sqrt{1-t\,\varphi^2(t)}}.$$

La dernière expression donne l'ordonnée de la courbe méridienne, l'intégration étant faite à partir du sommet du grand axe où $x = a$, $t = 1$ et $y = 0$.

L'expression sous le radical est du troisième degré en t. On a donc une intégrale elliptique. On peut la ramener à des intégrales de première et de seconde espèce de Legendre, dont les valeurs sont données par les tables de Legendre. On pourra calculer ainsi la courbe méridienne, y en fonction de x, pour n'importe quelle valeur de h.

Comme on a toujours $h < 4$, la quantité sous le radical n'a toujours qu'une seule racine égale à 1. On peut l'écrire

$$1 - t\,\varphi^2(t) = (1-t)\,[h^2t^2 + h(2-h)t + 1],$$

Posons, φ étant une nouvelle variable, qui remplace t,

$$(21)\qquad 1 - t = \lambda \operatorname{tang}^2\frac{\varphi}{2},\qquad -dt = \lambda \operatorname{tang}\frac{\varphi}{2}\frac{d\varphi}{\cos^2\frac{\varphi}{2}},$$

$$\lambda^2 = \frac{1+2h}{h^2},\qquad c^2 = \frac{1}{2} + \frac{2+h}{4\sqrt{1+2h}}$$

avec $c^2 < 1$. En transformant $\operatorname{tang}^2\frac{\varphi}{2}$ en $\cos\varphi$ et développant, le coefficient de $\cos\varphi$ sous le radical ci-dessous s'annule, et l'on obtient

$$\frac{dt}{\sqrt{(1-t)\,[(h^2t^2 + h(2-h)t + 1]}} = \frac{-d\varphi}{h\sqrt{\lambda}\sqrt{1-c^2\sin^2\varphi}},$$

$$(22)\qquad \frac{y}{a} = \frac{1}{2h\sqrt{\lambda}}\int_0^{\varphi} \frac{1 - h\lambda \operatorname{tang}^2\frac{\varphi}{2}}{\sqrt{1-c^2\sin^2\varphi}}\,d\varphi.$$

D'autre part on obtient identiquement

$$\frac{d}{d\varphi}\operatorname{tang}\frac{\varphi}{2}\sqrt{1-c^2\sin^2\varphi} = \frac{\operatorname{tang}^2\frac{\varphi}{2}}{2\sqrt{1-c^2\sin^2\varphi}} - \frac{1}{2\sqrt{1-c^2\sin^2\varphi}} - \sqrt{1-c^2\sin^2\varphi}.$$

En intégrant de o à φ cette expression on obtient

$$\int_0^{\varphi} \frac{\operatorname{tang}^2 \frac{\varphi}{2}\, d\varphi}{\sqrt{1 - c^2 \sin^2 \varphi}} = 2 \operatorname{tang} \frac{\varphi}{2} \sqrt{1 - c^2 \sin^2 \varphi} + F(c, \varphi) - 2\, E(c, \varphi).$$

$F(c, \varphi)$ et $E(c, \varphi)$ représentent les intégrales de première espèce et de deuxième espèce de Legendre, calculables par les tables.

Cette dernière expression, portée dans (22), donne pour la valeur de l'ordonnée du méridien

$$(23) \qquad \frac{y}{a} = \sqrt{\lambda}\, E(c, \varphi) - \sqrt{\lambda} \operatorname{tang} \frac{\varphi}{2} \sqrt{1 - c^2 \sin^2 \varphi} - \frac{h\lambda - 1}{2h\sqrt{\lambda}} F(c, \varphi),$$

φ est la fonction de t ou de $\frac{x}{a}$ définie ci-dessus (21). Pour chaque valeur de x, on aura une valeur et une seule pour y (*fig.* 54).

115. **Pour la même valeur du paramètre unique h, toutes les figures d'équilibre sont semblables.** — En effet, d'après la formule (23), y ne dépend que de λ, c, h et φ. Or les constantes λ et c ne dépendent que de h, et φ ne dépend que de t et de λ, c'est-à-dire de $\frac{x}{a}$ et de h. L'expression (23) est donc une fonction de h et de $\frac{x}{a}$ seuls

$$(24) \qquad \frac{y}{a} = \Phi\left(h, \frac{x}{a}\right), \qquad y = \Phi(h, x).$$

Par conséquent, pour deux figures d'équilibre correspondant à deux valeurs égales de h (10), la densité ρ, la vitesse de rotation ω, l'axe équatorial a, la tension superficielle f, étant tous différents dans les deux cas, à toute valeur de $\frac{x}{a}$ correspondra la même valeur de $\frac{y}{a}$ dans les deux cas d'après (24). En prenant le rayon équatorial a comme unité, les équations de la courbe méridienne d'équilibre sont identiques (24, 2). Les deux courbes méridiennes et les deux surfaces d'équilibre sont identiques. Pour une valeur donnée de h toutes les figures d'équilibre sont homothétiques à l'une d'entre elles, celle où l'on aura fait $a = 1$ par exemple, et le rapport d'homothétie de chacune d'elles par rapport à celle-ci sera égal à a.

Pour connaître exactement toutes les figures d'équilibre, comprises entre la sphère et celle qui aboutit à un anneau, il suffira de calculer par la formule (23) les courbes méridiennes correspondant à autant de valeurs de h que l'on voudra, comprises entre o et 2,32 valeurs limites de h, en y faisant $a = 1$.

Après avoir déterminé ainsi la *forme* de chacune de ces figures, on les obtiendra en *vraie grandeur* en calculant la valeur de a, qui correspond aux données du problème dans chaque cas particulier, pour telle vitesse de rotation ω par exemple.

116. Étude de la variation du rayon polaire. — Le rayon polaire b est la valeur de y sur l'axe de rotation. Il s'obient en faisant $x = 0$ dans l'expression (20), (23) ou (24) de y

$$\frac{b}{a} = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{\varphi(t)\,dt}{\sqrt{1 - t\,\varphi^2(t)}} = \Phi(h, 0), \tag{25}$$

$\frac{b}{a}$ est donc fonction uniquement de h et se calcule comme y.

D'autre part, en dérivant (25) sous le signe somme, par rapport à h, on obtient d'après (19)

$$\frac{d}{dh}\frac{b}{a} = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{(t-1)\,dt}{[1 - t\,\varphi^2(t)]^{\frac{3}{2}}}. \tag{26}$$

Cette expression est toujours négative, car tous les éléments différentiels sont négatifs, puisque l'on a $t < 1$ pour x compris entre o et a limites d'intégration.

Le rayon polaire b décroît donc continuellement, quand le paramètre h croît. Pour $h = 0$, on a $b = a$, et $\varphi(t) = 1$, d'où

$$\frac{d}{dh}\frac{b}{a} = -\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t}} = -\frac{b}{a} = -1. \tag{26'}$$

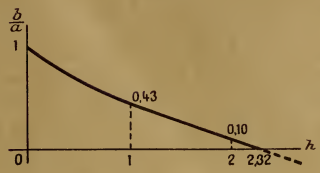
La tangente à la courbe de b fait un angle de 45° avec les axes.

On trouve ensuite par des tâtonnements sur différentes valeurs de h que $b = 0$ pour $h = 2,32$. Pour cette valeur du paramètre le rayon polaire devient nul, la masse se transforme en une figure annulaire.

La variation de $b : a$ par rapport à h est représentée par la

courbe de la figure 55. Cette variation est sensiblement linéaire à

Fig 55.



partir de la valeur $h = 1$, c'est-à-dire pour les figures qui sont creusées aux pôles.

117. Étude de la variation de la vitesse de rotation. Maximum de cette vitesse. — Le paramètre h contient $\omega^2 a^3$. Le calcul du volume invariable V de notre masse liquide, contiendra a^3 et permettra d'éliminer a^3 de h et des autres expressions en h. Nous obtiendrons alors ω^2, ou la vitesse de rotation ω en fonction du seul paramètre h.

En coupant notre masse liquide de révolution en tranches élémentaires normales à l'axe de rotation, et d'épaisseur dy on aura

$$(27) \qquad V = 2\pi \int_0^a x^2\, dy = \pi a^3 \int_0^1 \frac{t\,\varphi(t)\,dt}{\sqrt{1 - t\,\varphi^2(t)}}.$$

La formule est encore valable pour les surfaces concaves autour de l'axe de rotation, où les sections normales à l'axe peuvent couper deux fois la courbe méridienne.

Or on a identiquement

$$(28) \qquad \frac{d}{dt}\sqrt{1 - t\,\varphi^2(t)} = -\frac{1}{2}\,\frac{\varphi^2(t) + 2ht\,\varphi(t)}{\sqrt{1 - t\,\varphi^2(t)}}$$
$$= -\frac{1}{2}\,\frac{(1-h)\,\varphi(t) + 3ht\,\varphi(t)}{\sqrt{1 - t\,\varphi^2(t)}}.$$

En intégrant cette expression de 0 à 1 et tenant compte de (27) on a

$$1 = (1-h)\frac{b}{a} + \frac{3}{2}h\frac{V}{\pi a^3},$$

remplaçant h par sa valeur (10) dans le dernier terme, on obtient $\omega^2 \rho V$ où ρV est égal à la masse M, d'où finalement

$$\frac{3M}{16f}\omega^2 = 1 - (1 - h)\frac{b}{a}, \tag{29}$$

$b : a$ est fonction uniquement de h d'après (25). Il en est donc de même de la vitesse de rotation ω, d'après (29). Cette formule permet de la calculer facilement pour chaque valeur de h, par la même formule Φ, qui donne y et b.

En dérivant ω^2 par rapport à h on a

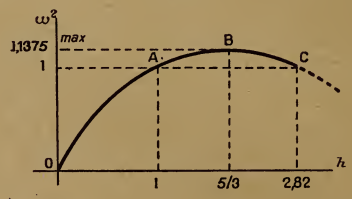
$$\frac{3M}{16f}\frac{d\omega^2}{dh} = \frac{b}{a} - (1 - h)\frac{d}{dh}\frac{b}{a}. \tag{30}$$

Pour $\omega = 0$ on a $h = 0$, et $b = a$ puis $\frac{d}{dh}\frac{b}{a} = -1$ d'après (26′). Le second membre de (30) est égal à 2. La courbe de ω par rapport à h part de l'origine avec cette valeur de la tangente.

On peut calculer ensuite ω en fonction de h au moyen de (25) et (26). On démontre que la dérivée seconde est toujours positive. La courbe tourne toujours sa concavité vers le bas. Elle a donc un maximum.

La vitesse de rotation a un maximum qui est déterminé par la valeur 1,662 de h qui annule le second membre de (30). Cette

Fig. 56.



valeur de h et celle de ω^2 qui lui correspond se calcule par des approximations successives :

$$h = 1,662, \qquad \frac{3M}{16f}\omega^2 = 1,1375.$$

La vitesse de rotation diminue ensuite à partir de cette valeur de

h jusqu'à la formation d'un anneau, où l'on a, d'après (29),

$$b = 0, \qquad h = 2,32, \qquad \frac{3M}{16f}\omega^2 = 1.$$

Cette valeur de ω^2 est la même que celle qui est donnée par (29) pour $h = 1$, où la figure commence à se creuser aux pôles.

La courbe de variation de ω^2, en prenant le premier membre de (29) comme ordonnée, est représentée par la courbe de la figure 56.

118. Variation du rayon équatorial. — La vitesse de rotation étant définie comme uniquement fonction de h, nous pouvons tirer a^3 de l'expression même du paramètre h, en fonction de ω^2 et de h. C'est également une fonction de h seul. On a

$$(31) \qquad a^3 = \frac{8f}{\rho}\frac{h}{\omega^2}, \qquad h = \frac{\rho\omega^2 a^3}{8f}.$$

Son calcul dépendra, comme celui de ω^2, de b et de y, uniquement de la fonction Φ définie par (25), (24) et (23).

On montre que a est toujours croissant avec h. Si l'on désigne par 1 sa valeur pour la sphère $\omega = 0$, il prend la valeur 1,43 pour la valeur maximum de la vitesse de rotation $h = 1,66$, et la valeur 1,67 au moment de la formation de l'anneau.

La courbe de ces valeurs de a étant tracée par rapport à h on en déduira la vraie grandeur des figures d'équilibre pour toute valeur de h, par conséquent pour toute valeur des données.

119. Expression du moment d'inertie et de l'énergie. — En coupant la masse par des tranches élémentaires normales à l'axe de rotation, d'épaisseur dy, on aura pour l'expression de la surface, en tenant compte de (9) et (20),

$$(32) \quad dS = 2\pi x\, ds, \quad S = 4\pi\int_0^a \sqrt{1+y'^2}\, x\, dx = 2\pi a^2 \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t\,\varphi^2(t)}}.$$

C'est l'intégrale de Legendre de première espèce $F(c, \varphi)$ déjà trouvée (23) dans l'intégration de la courbe méridienne y. Il faut

donner ici à φ sa valeur φ_0 correspondant à $x = 0$, on a

$$(32') \qquad S = \frac{2\pi a^2}{\sqrt{h}\sqrt[4]{1+2h}} F(c, \varphi_0).$$

Le moment d'inertie pour un des disques élémentaires et pour l'ensemble sera

$$(33) \quad dI = \frac{1}{2}\rho\pi x^4\, dy, \qquad I = \rho\pi \int x^4\, dy = \frac{1}{2}\rho\pi a^5 \int_0^1 \frac{t^2\varphi(t)\, dt}{\sqrt{1-t\varphi^2(t)}}.$$

Or on a identiquement, d'après (19).

$$\frac{d}{dt} t\sqrt{1-t\varphi^2(t)} = \frac{2-3(1-h)t\varphi(t)-5ht^2\varphi(t)}{2\sqrt{1-t\varphi^2(t)}}.$$

En intégrant cette expression de 0 à 1, le premier membre est nul et en tenant compte de (33), (32), (27). On obtient la relation

$$(34) \qquad \frac{S}{2\pi a^2} - \frac{3(1-h)}{2}\frac{V}{\pi a^3} - \frac{5h}{2}\frac{2I}{\pi\rho a^5} = 0.$$

On obtient ainsi l'expression remarquable du moment d'inertie I en fonction des expressions de la surface S et du volume V, déjà calculés. Le facteur commun $2\pi a^2$ disparaît de l'expression ci-dessus et le coefficient de I se simplifie en tenant compte de la valeur (10) de h,

$$(35) \qquad I = \frac{4f}{5\omega^2}\left(S - 3\frac{1-h}{a}V\right) = \frac{4f}{5\omega^2}\left(S - 3\frac{V}{R_0}\right),$$

R_0 est le rayon de courbure au pôle, donné par (14).

L'énergie potentielle de la tension superficielle est égale à fS, l'énergie cinétique à $\frac{1}{2}I\omega^2$. On aura donc pour l'énergie totale de la masse

$$(36) \qquad W = \frac{1}{2}I\omega^2 + fS = \frac{1}{5}f\left(7S - 6\frac{V}{R_0}\right).$$

120. Condition d'équilibre déduite du principe des travaux virtuels. — Le travail virtuel dû à la force centrifuge est égal à $\frac{1}{2}\omega^2\,\delta I$, où δI représente une variation quelconque du moment d'inertie. La vitesse de rotation ω étant supposée inaltérée par la déformation.

Le travail virtuel dû à la tension superficielle est égal à la variation de l'énergie potentielle $f\mathrm{S}$ de cette tension, donc égale à $-f\delta\mathrm{S}$.

Enfin le travail de la pression extérieure p_1 est égal à $-p_1\,\delta\mathrm{V}$.

Si nous considérons une déformation respectant les liaisons, nous avons $\delta\mathrm{V}=0$, le liquide étant supposé incompressible. Le travail virtuel dû à la pression extérieure p_1 est nul.

Le principe des travaux virtuels exige, pour l'équilibre, que dans toute déformation imposée la somme des deux premiers travaux virtuels soit nulle. Comme les déformations respectent les liaisons nous pouvons écrire $d\mathrm{I}$ et $d\mathrm{S}$, au lieu de $\delta\mathrm{I}$ et $\delta\mathrm{S}$, et la condition d'équilibre devient

$$(37)\qquad \frac{1}{2}\omega^2\,d\mathrm{I}=f\,d\mathrm{S},\qquad \frac{d\mathrm{I}}{d\mathrm{S}}=\frac{2f}{\omega^2}.$$

121. Stabilité de l'équilibre. — La formule (37) montre que, dans une déformation compatible avec les liaisons, le travail total de la force centrifuge et de la tension superficielle est la différentielle exacte d'une fonction de forces U

$$(38)\qquad \mathrm{U}=\frac{1}{2}\mathrm{I}\omega^2-f\mathrm{S}+\text{const.}$$

La fonction des forces $-f\mathrm{S}$ correspondant à la tension superficielle est égale et de signe contraire à l'énergie potentielle $f\mathrm{S}$ de cette tension. On a une formule analogue à celle de Poincaré.

D'autre part, nous avons vu que toutes les figures d'équilibre dépendent seulement de deux paramètres, h pour la forme et a pour la grandeur. Or h contient ω et a. Nous pourrons considérer ces figures, et les fonctions qui en dépendent, comme des fonctions des deux variables ω et a.

Pour une valeur donnée de la vitesse de rotation, les conditions d'équilibre s'écriront donc en exprimant que la dérivée de U par rapport à a est nulle :

$$(39)\qquad \frac{\partial\mathrm{U}}{\partial a}=\frac{1}{2}\omega^2\frac{d\mathrm{I}}{da}-f\frac{d\mathrm{S}}{da}=0.$$

C'est la condition (37) trouvée plus haut.

Pour que l'équilibre soit stable, il faut et il suffit que U soit

maximum, ou la dérivée seconde négative,

$$\frac{\partial^2 U}{\partial a^2} = \frac{1}{2}\omega^2 \frac{d^2 S}{da^2}\left(\frac{dI}{dS} - \frac{2f}{\omega^2}\right) + \frac{1}{2}\omega^2 \left(\frac{dS}{da}\right)^2 \frac{d^2 I}{dS^2}.$$

Comme la parenthèse est nulle pour une position d'équilibre, on a

$$(40) \qquad \frac{\partial^2 U}{\partial a^2} = \frac{1}{2}\omega^2 \left(\frac{dS}{da}\right)^2 \frac{d^2 I}{dS^2}, \qquad \frac{d^2 I}{dS^2} < 0.$$

Or $\frac{d^2 I}{dS^2}$ est la dérivée de $\frac{dI}{dS}$ donné par (37), et qui varie en sens inverse de ω^2. Donc quand la vitesse de rotation ω croît, depuis zéro jusqu'à son maximum, $\frac{dI}{dS}$ décroît, donc $\frac{d^2 I}{dS^2}$ est négatif et $\frac{\partial^2 V}{\partial a^2}$ également. L'équilibre est stable. Quand ω décroît depuis sa valeur maximum, jusqu'aux figures annulaires, l'équilibre est instable.

122. Cas des figures annulaires. — A partir d'une certaine vitesse de rotation, et d'une certaine valeur du paramètre h, la masse ne touche plus l'axe de rotation et prend la forme d'un anneau. Les équations du problème et leur discussion sont plus compliquées et il faut reprendre l'étude précédente sur ce nouveau problème.

L'équation de la figure d'équilibre est la même que (2). On en déduit par intégration la même équation (5) en y'. Mais ici on ne peut pas faire $x = 0$, car la masse ne coupe pas l'axe, et la constante C n'est pas nulle. On pourra écrire (5) sous la forme

$$(41) \qquad \frac{-xy'}{\sqrt{1+y'^2}} = k^2 x^4 + A x^2 + B = \psi(x), \qquad A = \frac{p_0 - p_1}{2f}, \qquad k^2 = \frac{\rho\omega^2}{8f}.$$

y' est toujours du signe contraire de $\psi(x)$ pour la demi-section de l'anneau située dans le premier quadrant, la seule qu'il soit nécessaire de considérer. On aura

$$(42) \qquad -y' = -\frac{dy}{dx} = \frac{k^2 x^4 + A x^2 + B}{\sqrt{x^2 - (k^2 x^4 + A x^2 + B)^2}} = \frac{\psi(x)}{\sqrt{x^2 - \psi^2(x)}}.$$

En remplaçant $x^2 : a^2$ par t, comme dans le premier cas, y sera donné par une intégrale hyperelliptique, au lieu d'une intégrale

elliptique. La solution complète directe est impossible, mais les développements en séries et des calculs théoriques, analogues à ceux qui ont été faits dans le premier cas, permettent de déterminer complètement l'évolution de la forme des figures d'équilibre et de leur grandeur.

Soient a et a' les deux rayons équatoriaux des cercles extérieurs et intérieurs de l'anneau. Pour $x = a$ on a $y' = -\infty$ et pour $x = a'$ on a $y' = +\infty$. La formule (41) donne alors les deux relations

$$(43) \qquad a = k^2 a^4 + \mathrm{A}\, a^2 + \mathrm{B}, \qquad -a' = k^2 a'^4 + \mathrm{A}\, a'^2 + \mathrm{B}.$$

Ces deux formules déterminent A et B en fonction de a et a'. Le trinome bicarré de (41) est donc positif et égal à a pour $x = a$ et négatif, égal à $-a'$ pour $x = a'$. Donc y' ne s'annule qu'une fois entre a et a'. La section de l'anneau n'a qu'une tangente parallèle au plan de l'anneau et où y et l'épaisseur de cet anneau sont maximums. C'est la plus grande des deux racines de $\psi(x)$, qui est entre a et a'. Pour a' très petit, B est très petit également, tend vers a'. C'est la figure voisine du cas précédent où l'on avait $\mathrm{B} = 0$, $b = 0$, $h = 2{,}32$.

123. Les formules des figures annulaires sont générales et comprennent les figures non annulaires comme cas particulier. — Dans l'expérience de Plateau, il y avait un axe matériel de rotation, qui était mouillé par le liquide. Par conséquent la masse liquide formait un anneau autour de cet axe de rayon a' et ce sont les équations (41) et (42) qu'il faudrait appliquer en toute rigueur. Le long de l'axe matériel, pour $x = a'$, on aurait $y' = -\infty$ et la seconde des équations (43) aurait $+a'$ au premier membre.

Comme le liquide mouille l'axe de rotation, la tangente à la courbe croît brusquement au voisinage, et devient infinie, alors que dans le premier cas traité plus haut, masse sans axe matériel, cette tangente était nulle. Mais comme, dans l'expérience de Plateau, l'axe avait un rayon a' très petit, les développements en série montrent qu'au voisinage de cet axe les valeurs de y, ordonnée de la courbe méridienne, sont très rapidement les mêmes que celles du cas où l'axe matériel n'existerait pas. Les calculs faits précédemment restent donc strictement applicables à l'expérience

de Plateau pour les figures de la masse, avant la formation des anneaux.

Dans le cas d'un axe de rotation matériel à rayon a' très petit on peut supposer aussi que le liquide ne mouille pas l'axe. Le liquide se creuse autour de l'axe et la tangente y prend une valeur $y' = +\infty$ comme pour un anneau. On a exactement les mêmes formules (43) pour définir A et B. On voit également, d'après la valeur (45) de B, que si le rayon a' de l'axe de rotation est nul ou négligeable il en est de même de B. Les formules du problème précédent ne sont donc qu'un cas particulier des formules des figures annulaires, où la constante d'intégration B est nulle ou négligeable. L'intérêt de ce cas particulier est que ses formules sont complètement intégrables par les fonctions elliptiques.

Nous verrons que les figures calculées dans le cas des anneaux, par développements en séries, se raccordent exactement dans toutes leurs valeurs, pour $a' = 0$, avec celles du cas précédent, au moment de la formation de l'anneau pour $h = 2{,}32$.

Nous verrons également que toutes les relations démontrées dans le premier cas s'étendent aux anneaux, avec cette remarque qu'il y aura ici, outre le paramètre h, un second paramètre variable a', ou plutôt $\frac{a'}{a}$, pour déterminer la forme des figures. Dans le premier cas, il était constamment nul, dans les anneaux le rapport des deux rayons varie de 0 à 1.

124. A chaque valeur du rapport des deux rayons de l'anneau correspondent des figures d'équilibre, qui sont toutes semblables entre elles. — La première des formules (43) peut s'écrire

$$(44) \qquad \mathrm{A}a + \frac{\mathrm{B}}{a} = 1 - k^2 a^3 = 1 - h, \qquad k^2 a^3 = h = \frac{\rho \omega^2 a^3}{8f}.$$

Le paramètre h est le même que dans le premier cas. Toutes les autres quantités pourront s'exprimer de même en fonction de h et leur variation ne dépendra que de celle de h.

On tire B des deux équations, et l'on a

$$(45) \qquad \frac{\mathrm{B}}{a} = \frac{a'}{a + a'} + k^2 a a'^2 = \frac{a'}{a + a'} + h \frac{a'^2}{a^2},$$

$\mathrm{A}a$ et $\frac{\mathrm{B}}{a}$ ne dépendent que du rapport $\frac{a'}{a}$ et de h.

Ces valeurs portées dans l'expression $\psi(x)$ de (41) donnent

$$(46) \qquad \psi(x) = a\left(h\frac{x^4}{a^4} + \mathrm{A}\,a\frac{x^2}{a^2} + \frac{\mathrm{B}}{a}\right) = a\,\varphi\left(\frac{x}{a}\right).$$

L'expression (42) s'écrira alors

$$(47) \qquad d\frac{y}{a} = \frac{-\varphi}{\sqrt{x^2 : a^2 - \varphi^2}}\,d\frac{x}{a}.$$

Cette expression doit s'intégrer de a à x, pour avoir la valeur de y, l'ordonnée de la courbe méridienne. Comme φ ne contient que h, le rapport $\frac{a'}{a}$ des deux rayons du tore et $\frac{x}{a}$, on obtiendra pour $\frac{y}{a}$ une expression qui sera seulement fonction de ces trois quantités,

$$(48) \qquad \frac{y}{a} = \Phi\left(h, \frac{a'}{a}, \frac{x}{a}\right).$$

Comme nous avons une intégrale hyperelliptique, la fonction Φ s'obtiendra par développements en séries. Pour les petits anneaux et les petites valeurs de a', on développe suivant les puissances entières de $\frac{a'}{a}$. Quand a' se rapproche de a, pour les anneaux à grand rayon, on développe suivant les puissances de $1 - \frac{a'}{a}$.

Pour $x = a'$, la courbe méridienne de l'anneau se forme, $y = 0$ dans (48) et l'on obtient la relation entre h et $\frac{a'}{a}$

$$(49) \qquad \Phi\left(h, \frac{a'}{a}\right) = 0.$$

Cette expression déterminera, pour chaque valeur de h, une ou plusieurs valeurs du rapport $\frac{a'}{a}$, trois au plus. Pour chacune de ces valeurs de $\frac{a'}{a}$, la courbe méridienne de la section de l'anneau, définie par (48) sera identique, en prenant a comme unité, quelle que soit la valeur des données ρ, ω, f contenues dans h.

On verra en outre qu'à chaque valeur du rapport $\frac{a'}{a}$, variant de 0 à 1, ne correspond qu'une seule valeur de h, dans (49). Si donc on prend $\frac{a'}{a}$ comme paramètre, à chaque valeur de ce rapport corres-

pondra pour (48), en prenant a pour unité, une seule courbe méridienne, à laquelle toutes les autres seront homothétiques, dans le rapport d'homothétie a.

Il suffit donc ici de se donner $\frac{a'}{a}$ pour déterminer complètement la forme de la figure d'équilibre. Il suffira de calculer ensuite la valeur de a d'après les données du problème pour déterminer la vraie grandeur de cette figure.

125. Détermination du rayon intérieur de l'anneau et de sa variation. — On peut donc prendre a comme unité, pour déterminer la forme des figures. Faisons alors $a = 1$ dans (46), on pourra écrire pour la parenthèse

$$\varphi(x) = hx^4 + Ax^2 + B. \tag{50}$$

L'expression Φ de (49), qui définit $\frac{a'}{a}$ ou a' en fonction de h, pourra s'écrire

$$\Phi = \int_1^{a'} \frac{(hx^4 + Ax^2 + B)\,dx}{\sqrt{x^2 - (hx^4 + Ax^2 + B)^2}} = \int_1^{a'} \frac{\varphi(x)\,dx}{\sqrt{x^2 - \varphi^2(x)}}. \tag{51}$$

Cette intégrale donne une fonction de a' et de h, qui doit être nulle, d'après (49), pour les valeurs de a' et de h, qui correspondent à des figures d'équilibre. Nous allons déterminer la variation de cette fonction, par rapport à h, pour déterminer le nombre de ses racines en a', pour chaque valeur de h.

Prenons donc la dérivée de Φ par rapport à h. La dérivée de l'élément d'intégration donne

$$\frac{\partial}{\partial h} \frac{\varphi}{\sqrt{x^2 - \varphi^2}} = \frac{x^2}{(x^2 - \varphi^2)^{\frac{3}{2}}} \frac{\partial \varphi}{\partial h} = -\frac{x^2(1 - x^2)(x^2 - a'^2)}{(x^2 - \varphi^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Or on a aussi

$$x^2 - \varphi^2 = (1 - x^2)(x^2 - \varphi'^2)\varphi_1, \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial h} = \int_{a'}^{1} \frac{x^2\,dx}{\sqrt{(1 - x^2)(x^2 - a'^2)}\,\varphi_1^{\frac{3}{2}}}, \tag{52}$$

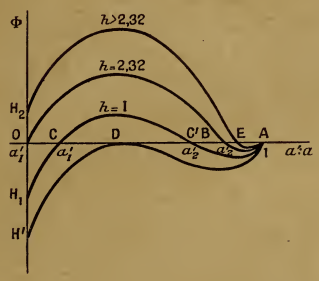
où φ_1 est une expression toujours positive

$$\varphi_1 = h^2x^4 + \left[\frac{2h}{1 - a'} + h^2(1 + a'^2)\right]x^2 + \left(ha' - \frac{1}{1 - a'}\right)^2.$$

Tous les éléments d'intégration dans (52) sont donc positifs, et la dérivée $\frac{\partial \Phi}{\partial h}$ est toujours positive, avec $a' < 1$. Ainsi a', ou $a' : a$, étant donné, Φ croît constamment avec h. Il y a donc toujours une valeur et une seule de h qui annule Φ et donne une figure d'équilibre d'après (49).

Prenons a' et Φ comme axes de coordonnées et traçons les courbes de Φ pour différentes valeurs de h (*fig.* 57).

Fig. 57.



On voit d'abord sur la formule qui donne Φ que pour $a' = a$ ou $a' = 1$, on a $\Phi = 0$ quelle que soit la valeur de h. Toutes les courbes passeront donc par le point A, situé sur l'axe des a', avec $OA = 1$.

Pour $h = 2{,}32$, l'anneau se forme et $a' = 0$. La courbe part de l'origine. On la construit point par point, au moyen des développements en séries. Elle monte d'abord, passe par un maximum, et redescend en coupant l'axe a' au point B, puis se termine au point A.

Cette valeur de h donne donc trois racines de Φ en a', et trois figures d'équilibre différentes : la première figure annulaire, où le rayon intérieur de l'anneau est nul, $a'_1 = 0$, point O; la figure annulaire extrême, avec a très grand et a' très voisin de a, c'est-à-dire $a' = 1$, point A; enfin une troisième figure annulaire correspond au point B, où l'on a environ $a'_2 = 0{,}9a$.

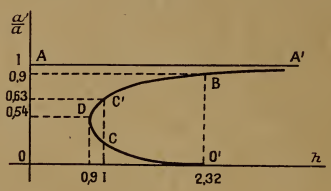
D'après la démonstration faite plus haut, où $\frac{\partial \Phi}{\partial h}$ est toujours positive, la valeur de Φ doit croître avec h. Par conséquent pour

toutes les valeurs de h plus grandes que 2,32, la courbe des valeurs de Φ sera tout entière au-dessus de la courbe type précédente, courbe H2EA par exemple. La fonction Φ, en dehors de $a' = 1$, n'aura qu'une racine correspondant au point E. Il n'y aura qu'une valeur de a' correspondant à cette valeur de h et une seule figure d'équilibre.

Au contraire pour les valeurs de h plus petites que 2,32, la courbe de Φ sera tout entière au-dessous de la courbe type, en H, CC'A par exemple. Elle coupe l'axe de deux points C, C'. Elle déterminera donc deux valeurs de a', racines de Φ et deux figures d'équilibre pour cette valeur de h. Ces racines sont intérieures à celles de la courbe type et se rapprochent l'une de l'autre à mesure que la valeur de h décroît. On a une racine double pour $h = 0,9$ avec $a' : a = 0,54$, où a' atteint déjà les 9 dixièmes du rayon primitif de la sphère.

La courbe des variations des valeurs de $a' : a$ par rapport à h est donnée par la figure 58, O'CDC'BA, où les points représentent

Fig. 58.



les mêmes valeurs que les mêmes points de la figure 57, on a mis seulement O' au lieu de O, pour $h = 2,32$. De plus, le point A de la figure 57 serait représenté par tous les points de la droite AA', puisque $a' = 1$ est solution de Φ quelle que soit h.

126. **Détermination du rayon extérieur a de l'anneau et de sa variation.** — Comme dans le premier cas, après avoir déterminé la forme des figures d'équilibre au moyen de $a' : a$ et h, d'après les formules et les discussions précédentes, on calculera la vraie grandeur de ces figures en déterminant a par une nouvelle relation,

celle qui donne le volume de la masse, quantité donnée. On a

$$(53) \qquad V = 2\pi \int_{a'}^{a} x^2\, dy = 2\pi a^3 \int_{a'}^{a} \frac{x^2}{a^2}\, d\frac{y}{a} = 2\pi a^3 F\left(h, \frac{a'}{a}\right),$$

F est la fonction qui représente l'intégrale hyperelliptique, dont l'élément d'intégration est le même que celui de dy, multiplié par x^2. Comme l'intégration se fait de a' à a, on obtient une expression F uniquement fonction de h et de $\frac{a'}{a}$ comme pour Φ de (49), car l'intégrale est fonction uniquement de h, $\frac{a'}{a}$ et $\frac{x}{a}$ et dans la seconde limite on fait ici $x = a'$.

Ayant déterminé, au moyen de Φ (49), les valeurs de $a' : a$ correspondant à une valeur de h, ou inversement la valeur de h correspondant à une valeur de a', la formule (53) nous donnera la valeur de a, correspondant à une valeur quelconque de h ou de a', c'est-à-dire la grandeur vraie de l'une quelconque de nos figures d'équilibre

$$(54) \qquad a^3 = \frac{V}{2\pi F(h, a')}.$$

On a en dérivant

$$(55) \qquad \frac{\partial a^3}{\partial h} = -\frac{V}{2\pi F^2}\frac{dF}{dh}, \qquad \frac{dF}{dh} = \frac{\partial F}{\partial a'}\frac{da'}{dh} + \frac{\partial F}{\partial h}.$$

On démontre que $\frac{\partial F}{\partial h}$ est toujours positif, comme $\frac{\partial \Phi}{\partial h}$, ce qui est évident, puisque F ne diffère de Φ que par le facteur $x^2 : a^2$ qui ne contient pas h.

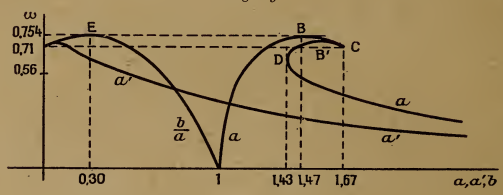
Ces formules et les développements en série, permettent de démontrer qu'à partir de la formation de l'anneau $a' = 0$, le rayon extérieur a décroît et assez rapidement, en même temps que h, mais moins longtemps que celui-ci. Comme le rayon intérieur a' croît au contraire et assez vite, on voit que l'anneau, au moment de sa formation, se contracte brusquement sur lui-même. Sa section méridienne, d'abord allongée vers l'axe de rotation qu'elle quitte, prend très rapidement une forme elliptique, presque circulaire, alors que le centre de cette section ne se déplace presque pas.

C'est un phénomène très curieux de brusque contraction, sous l'action de la tension superficielle, quand la dernière membrane

centrale, qui empêchait la formation de l'anneau, vient à se rompre, phénomène très bien analysé dans toutes ses phases par le calcul mathématique. C'est un phénomène analogue à celui de la division d'un mince filet fluide en gouttelettes. Le calcul démontre d'ailleurs que les figures d'équilibre sont instables au voisinage et au moment de la formation de l'anneau. On comprend qu'il y ait passage brusque d'une forme à l'autre. L'expérience montre également que le passage d'une forme à l'autre est très rapide, pour aboutir à des formes plus stables.

Le grand axe a, qui était égal à 1,67 du rayon de la sphère primitive au moment de la formation de l'anneau point C, se contracte à 1,43, c'est-à-dire à 0,84 de la valeur précédente, ou de 0,16, puis croît ensuite indéfiniment (courbe CDa, *fig.* 59). La

Fig. 59.



courbe ABC représente la variation de a par rapport à la vitesse de rotation ω, pour les figures non annulaires, le point de départ étant en A, ou 1, pour la sphère, avec $\omega = 0$.

127. Variation de la vitesse de rotation ω. — Après avoir déterminé le rayon équatorial a, on peut tirer la vitesse de rotation de la valeur du paramètre h, comme dans le premier cas

$$(56) \qquad h = \frac{\rho\omega^2 a^3}{8f} = \frac{\rho\omega^2}{8f}\,\frac{V}{2\pi f}, \qquad \omega^2 = \frac{16\pi f F h}{M}.$$

La fonction F permet de déterminer ses valeurs et sa variation.

La vitesse de variation croît d'abord au moment de la formation de l'anneau et de sa contraction brusque, sans atteindre tout à fait sa valeur maximum du cas précédent. Son maximum actuel est atteint environ quand a a effectué la moitié de sa contraction.

Cette diminution de la vitesse de rotation est d'ailleurs une conséquence mécanique de la contraction brusque de l'anneau. Cette contraction brusque amène une diminution brusque du moment d'inertie I et comme l'énergie cinétique $\frac{1}{2}I\omega^2$ ne peut pas varier brusquement, elle entraîne un accroissement de ω^2.

128. Tableau des valeurs, résumé de la discussion, courbes des variations et des sections méridiennes. — Nous relevons ici, pour les deux cas étudiés, les principales valeurs calculées, pour différentes valeurs du paramètre h.

h.	a.	$b : a$.	a'.	ω.	$\frac{S}{4\pi}$	$\frac{I}{2\pi}$.	$\frac{2W}{\pi}$.
0	1	1	–	0	1	0,27	1
1	1,26	0,43	–	0,71	1,11	0,44	1,56
1,66	1,43	0,21	–	0,75	1,31	0,62	2,0
2,32	1,67	0	0	0,71	1,7	1,0	2,68
1,75	1,48	–	0,08	0,73	1,45	0,71	2,2
1,0	1,47	–	0,46	0,56	1,42	0,74	1,88
0,2 min	1,67	–	0,9	–	min	min	min
1,0	2,0	–	1,26	0,35	–	–	–
$+\infty$	$+\infty$	–	$+\infty$	0	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$

Les courbes de la figure 59 représentent la variation des éléments a, b, a' de la figure, mesurés sur l'axe des abscisses, avec la valeur de la vitesse de rotation ω en ordonnée.

Pour les premières figures non annulaires, on a la courbe ABC pour la variation de a, point B pour le maximum de ω et point C au moment de la formation des anneaux. La courbe correspondante du rayon polaire b est AEC′.

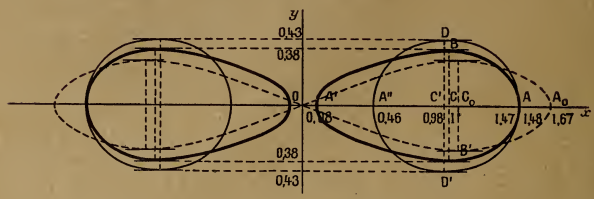
Le rayon intérieur de l'anneau est toujours croissant, courbe a' partant de C′. Elle continue celle de b et lui est tangente en C′.

La variation du rayon extérieur a des anneaux est indiquée par la courbe CDa. On voit la contraction brusque en CD, avec accroissement de ω au début jusqu'en B′, puis a croît ensuite indéfiniment.

On a vu que les figures d'équilibre sont instables sur BC. On verra qu'elles le sont également sur la portion de CB′, où ω est croissant. On comprend que la portion BCB′ soit franchie rapidement par une brusque contraction, comme si le point figuratif sautait directement de B en B′, où l'on retrouve des figures stables.

La figure 60 représente les deux sections superposées de la courbe méridienne pour $h = 1,75$ et $h = 1$, avec en pointillé la

Fig. 60.



courbe au moment de la formation des anneaux, $h = 2,32$. Le diamètre OA_0 se contracte d'abord en A'A puis en A''A.

Pour $h = 1,75$ on a la courbe ABA'B', où $a = 1,48$, $a' = 0,08$ seulement, encore très petit. La courbe méridienne ne présente déjà plus d'inflexion entre B et A'. Elle est partout convexe.

Pour $h = 1$ on a la courbe ADA''D', qui est déjà sensiblement elliptique. C' étant l'abscisse du point D le plus haut, on a $C'A'' = 0,44$, $C'A = 0,49$ et $C'D = 0,43$. Le point A n'a pas changé dans le passage d'une figure à l'autre $a = 1,47$ dans la seconde. L'abscisse du point le plus haut non plus, 1 et 0,98, mais a' a passé de 0,08 à 0,46.

Comme a' est toujours croissant, on peut comparer les autres variations à a'. La vitesse de rotation ω croît légèrement et diminue ensuite continuellement, maximum pour $a' = 0,06$. Le rayon extérieur a décroît plus longtemps que ω, minimum pour $a' = 0,3$. Enfin h décroît jusqu'à $a' = 0,9$, puis croît indéfiniment.

129. **Étude du cas où le rayon est très grand. L'anneau est un tore.** — Dans les figures ci-dessus on a pris comme unité le rayon primitif de la sphère. On voit que la seconde section a son centre C' à peu près à cette distance et peut se confondre avec un cercle, en première approximation, tous les points étant à 1/10 près à la même distance de C'. L'approximation sera déjà de 1/10. On peut dans ce cas obtenir très simplement différentes valeurs très approchées des éléments pour les anneaux dont le centre de la section est plus éloignée que 1.

L'expression (3) du rayon de courbure R de la méridienne s'écrit dans le cas des anneaux, d'après (41),

$$(57)\qquad \frac{1}{R} = 3k^2x^2 + A - \frac{B}{x^2}, \qquad \frac{a}{r} = 3k^2a^2 + Aa - \frac{B}{a}.$$

Pour le cercle, ce rayon de courbure est constant, on le désigne par r et on le détermine pour la valeur $x = a$, d'où la seconde expression.

On a aussi r égal à la demi-différence de a et a', en remplaçant A et B par leurs valeurs (44), (45), on obtient

$$(58)\qquad 2k^2a(a^2 - a'^2) = 1, \qquad r = \frac{1}{2}(a - a'),$$

d'où, en remplaçant k^2 par sa valeur en fonction de h,

$$(59)\qquad \frac{\rho\omega^2}{f}\, ar(a - r) = 1, \qquad 8h\frac{r}{a}\left(1 - \frac{r}{a}\right) = 1, \qquad h = k^2a^3 = \frac{\rho\omega^2 a^3}{8f},$$

si a tend vers l'infini, r tend vers zéro, h tend vers l'infini.

D'autre part le volume du tore s'écrit d'après le théorème de Guldin, R étant le rayon de la circonférence décrite par le centre de la section,

$$(60)\qquad V = 2\pi R.\pi r^2 = 2\pi^2 r^2(a - r) = 2\pi^2 a^3 \frac{r^2}{a^2}\left(1 - \frac{r}{a}\right).$$

On voit également que r tend vers zéro quand a tend vers l'infini.

En multipliant (59) et (60) l'une par l'autre, il vient

$$(61)\qquad \frac{\rho\omega^2 V}{2\pi^2 f} = \frac{r}{a}, \qquad \frac{M}{2\pi^2 f}\,\omega^2 = \frac{r}{a}.$$

Le carré de la vitesse de rotation est proportionnel au rapport du rayon de la section au rayon équatorial. Ces deux valeurs tendent vers zéro, quand a croît indéfiniment.

En portant la valeur $\frac{r}{a}$ de (61) dans (59) on a

$$(62)\qquad \frac{4M}{\pi^2 f}\, h\omega^2\left(1 - \frac{M}{2\pi^2 f}\,\omega^2\right) = 1, \qquad h\omega^2 = \frac{\pi^2 f}{4M} = \text{const.}$$

Comme ω^2 est très petit de l'ordre de $\frac{r}{a}$ (61), on peut le négliger

dans la parenthèse de (62) et l'on obtient la seconde formule (62), ω^2 varie en raison inverse de h.

Les formules (59) ou (60) permettent de calculer r pour une valeur donnée de h ou de a. On en déduit ensuite ω^2 par (61). On vérifie par (57) que l'approximation avec laquelle le cercle vérifie l'équation de la courbe méridienne.

Remarque. — Cette formule (57) donne les points d'inflexion de la courbe méridienne, pour $R = \infty$

$$3k^2x^4 + Ax^2 - B = 0. \tag{63}$$

On vérifie que déjà pour $a' \geqq 0{,}08$, la courbe méridienne est partout convexe.

130. Cas où la section de l'anneau est elliptique. — Par les développements en séries on démontre que l'on a pour l'ordonnée y de la courbe méridienne

$$\frac{y}{a} = \beta\sqrt{\left(1-\frac{x}{a}\right)\left(\frac{x}{a}-\frac{a'}{a}\right)}, \qquad \beta = 1 - \frac{1}{8}\left(1-\frac{a'}{a}\right)^2 \tag{64}$$

en négligeant les puissances 4e et supérieures de $1 - \frac{a'}{a}$.

Cette équation représente une ellipse dont le centre est situé sur l'axe des x, dont le grand axe x_1 est égal à $\frac{1}{2}(a-a')$. Le petit axe y_1 est donné par la valeur de y pour $x = \frac{1}{2}(a+a')$, on a

$$\frac{y_1}{a} = \frac{1}{2}\,\frac{a-a'}{a}\,\beta, \qquad x_1 = \frac{1}{2}(a-a'), \qquad y_1 = \beta x_1. \tag{65}$$

En appelant x_1 et y_1 les deux axes, on voit que leur rapport est égal à β. L'aplatissement de l'ellipse est égal à $\frac{1}{8}\left(1-\frac{a'}{a}\right)^2$. L'ellipse se rapproche très rapidement du cercle.

L'aplatissement est déjà réduit à 0,13 dans la figure 60, avec $a = 1{,}47$.

131. Expressions du moment d'inertie et de l'énergie. — En appliquant aux expressions de la surface S, du volume V et du moment d'inertie I, dans le cas des anneaux, les mêmes calculs

faits au n° 112 dans le premier cas, on trouve une relation correspondant à (34), où dans le terme en V le facteur $\frac{1-h}{a}$ est simplement remplacé par A. On obtient donc la formule générale du moment d'inertie, qui remplace (35) :

$$(66) \qquad I = \frac{4f}{5\omega^2}(S - 3AV).$$

D'après la formule (44), qui donne A, la formule (35) est un cas particulier de (66) en faisant $a' = 0$, d'où $B = 0$.

On aura de même pour l'énergie

$$(67) \qquad W = \frac{1}{2} I\omega^2 + fS = \frac{1}{5} f(7S - 6AV).$$

A remplace $1 : R_0$ de (36).

132. Stabilité de l'équilibre. — On a toujours, comme dans le premier cas, les deux formules qui définissent l'équilibre et sa stabilité

$$(68) \qquad \frac{dI}{dS} = \frac{2f}{\omega^2}, \qquad \frac{\partial^2 U}{\partial a^2} = \frac{1}{2}\omega^2 \left(\frac{dS}{da}\right)^2 \frac{d^2 I}{dS^2}.$$

Pour la stabilité il faut $\frac{d^2 I}{d^2 S} < 0$. Il faut étudier la variation du moment d'inertie I par rapport à la surface totale S.

On montre d'abord que la courbe de variation de I par rapport à ω est la même que celle de a par rapport à la même variable, celle de l'énergie également.

On en déduit ensuite que la courbe de variation de I par rapport à ω, à partir de la formation des anneaux $\omega = 0{,}71$, tourne d'abord sa concavité vers le haut, présente un point d'inflexion pour la vitesse maximum des anneaux $\omega = 0{,}74$, tourne ensuite sa concavité vers le bas jusqu'au point correspondant au minimum simultané de I, de S et de a, où la courbe a un point de rebroussement pour $\omega = 0{,}66$, la courbe tourne ensuite sa concavite vers le haut comme au début.

Il y a équilibre stable $\frac{d^2 I}{d^2 S} < 0$, seulement dans le second intervalle, quand la courbe tourne sa concavité vers le bas, pour ω com-

pris entre 0,66 et 0,74. C'est la seconde partie de l'intervalle où a décroît, portion B'D.

133. **L'expérience de Plateau et les résultats mathématiques.** — Dans son « Mémoire sur les phénomènes que présente une masse liquide libre et soustraite à l'action de la pesanteur » (1) relate les résultats de ses expériences sur la rotation d'une masse d'huile dans un mélange d'eau et d'alcool d'égale densité. La rotation était obtenue au moyen d'un axe vertical, qui entraînait un disque dont le centre coïncidait avec celui de la sphère d'huile.

En faisant tourner la sphère d'huile on constate qu'elle s'aplatit aux pôles et se renfle à l'équateur, 1re phase.

Pour une vitesse plus grande, elle se creuse aux pôles, en dessus et en dessous, en s'étendant dans le sens horizontal. Les deux pôles se touchent et la masse prend la forme d'un anneau pour une vitesse d'environ un tour par seconde, 2e phase.

En augmentant encore la vitesse du disque, l'anneau se dilate jusqu'à un diamètre de 9 à 10cm, la section méridienne de l'anneau prenant une figure sensiblement circulaire, 3e phase.

Si l'on arrête la rotation, l'anneau se contracte, repasse par les mêmes phases en sens inverse, reforme la masse centrale, qui reprend sa forme sphérique, 4e phase (§ 11 du Mémoire).

L'évolution des formes est bien très exactement celle qui a été calculée par la théorie. Dans le développement maximum de l'anneau, en prenant le rayon de la sphère primitive comme unité, on aurait $a' = 1,26$, $a = 2$ et le rapport des axes de la section méridienne, supposée elliptique serait 0,98. Elle serait vue parfaitement circulaire.

Il faut remarquer que Plateau n'a pas noté de contraction brusque au moment de la formation de l'anneau, alors que, même au point de vue physique, elle est nécessaire, car il y a une pointe de rebroussement qui s'arrondit, et la tension superficielle doit ramener brusquement cette partie à sa nouvelle forme d'équilibre.

Dans l'expérience de Plateau, il faut augmenter continuellement la vitesse du disque pour arriver à la forme annulaire, et dilater l'anneau, alors que dans la théorie la vitesse de rotation ω passe

(1) *Mémoires de l'Académie royale de Bruxelles*, t. 16.

par un maximum avant même la transformation en anneau. Mais, comme le constate Plateau, la vitesse de la masse est toujours inférieure à celle du disque et cela de plus en plus à mesure que la masse se dilate horizontalement. La vitesse de rotation ω peut très bien diminuer quand celle du disque s'accroît. Il faut que le disque fournisse une énergie toujours plus grande pour permettre à la masse de vaincre les frottements du milieu, lui donner le moment de rotation $I\omega$ ou l'énergie cinétique $\frac{1}{2} I\omega^2$, correspondant à sa vitesse ω, même décroissante.

Cependant l'expérience de Plateau, qu'on est habitué à voir dans les livres, aboutissait au *fractionnement* de la masse d'huile en deux autres : une masse centrale entourée d'un anneau, qui pouvait lui-même se fractionner en plusieurs parties.

Mais cette seconde forme de l'expérience n'est qu'un cas très particulier des expériences générales précédentes, et obtenue par un artifice expérimental spécial. Ces résultats sont relatés seulement au paragraphe 21 du Mémoire de Plateau. Il fallait placer le disque tournant à la partie inférieure de la masse d'huile et le faire tourner à une vitesse très grande de 15 tours par seconde.

Il y a alors une très grande différence de vitesse entre les différentes parties, comme le note Plateau. Ce sont ces différences de vitesse qui produisent alors le fractionnement et non la vitesse même.

Pour entreprendre l'étude mathématique de ce cas, il faudrait introduire des vitesses de rotations variables dans la masse et ce serait très compliqué.

On pourrait du moins réunir les deux résultats des discussions ci-dessus, fractionner une masse en deux autres, l'une centrale, l'autre annulaire, étudier les variations de leur forme et de leur grandeur, les amener à être tangentes avec la même vitesse de rotation, ou des vitesses différentes. On aurait une représentation de la seconde forme de l'expérience de Plateau.

On pourrait également renouveler l'expérience de Plateau en réalisant une vitesse de rotation plus uniforme, en faisant tourner le vase lui-même avec une accélération faible. La fixité et l'entraînement de la sphère d'huile pourrait être réalisée par un ou plusieurs fins réseaux métalliques placés à l'intérieur du vase.

134. **Cas d'une masse soumise à la fois à la gravitation et à la tension superficielle.** — A l'intérieur de la masse la gravitation et la force centrifuge agissent seules. Les surfaces d'égale pression seront données, comme dans le cas de la gravitation seule, par la formule (48) (Chap. III). A la surface, il faudra ajouter comme dans (2), n° 109, la pression extérieure p_1, qui rentre dans la constante et le potentiel dû à la tension superficielle, que nous désignerons maintenant par f', au lieu de f, qui représente la constante de la gravitation. On aura pour définir l'équilibre de la surface libre, V représentant le potentiel dû à la gravitation,

$$(69) \qquad fV + \frac{1}{2}\omega^2 x^2 - \frac{f'}{\rho}\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right) = C.$$

Le terme V croît comme le carré des dimensions, alors que la tension superficielle varie en raison inverse du rayon de courbure, qui est proportionnel aux dimensions linéaires, pour des figures semblables. Pour les grandes masses c'est donc l'attraction qui l'emportera, l'action de la tension superficielle sera négligeable. Pour les petites masses au contraire la gravitation deviendra négligeable et c'est la tension superficielle qui seule jouera un rôle pour limiter et définir la grandeur de la déformation créée par la force centrifuge.

135. **Relation de Poincaré étendue à ce cas général.** — Nous avons établi au n° 29 (Chap. IV) une relation remarquable due à Poincaré, dans le cas de la gravitation seule, entre l'énergie totale W de la masse, son moment de rotation I, son volume T et la valeur de la fonction de force constante à la surface U_0. On peut l'étendre au cas de la tension superficielle par le même calcul. On a ici d'après (69), $\rho = 1$,

$$(70) \qquad U = fV + \frac{1}{2}\omega^2 x^2 - f'\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right).$$

Les variations δV, δI dans le cas d'un déplacement virtuel quelconque sont les mêmes qu'au n° 29. On a de plus pour la variation de la surface

$$(71) \qquad \delta S = \int_S \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right)\zeta\, d\sigma.$$

Pour la fonction U on aura, comme dans (29) (Chap. III).

$$(72) \qquad \delta\left(W - f'S + \frac{1}{2}\omega^2 I\right) = U_0\,\delta T.$$

Dans le cas d'un déplacement compatible avec les liaisons, $\delta T = 0$, on a

$$(73) \qquad \delta\left(W - f'S + \frac{1}{2}\omega^2 I\right) = 0.$$

Dans le cas d'un déplacement homothétique, on aura la même démonstration qu'au n° 29 avec en plus $\delta S = 2\varepsilon S$, d'où la relation qui remplace (87)

$$(74) \qquad \frac{5}{3}\left(W + \frac{1}{2}I\omega^2\right) - \frac{2}{3}f'S = U_0 T.$$

Remarque. — D'après ce qui a été dit au n° 28, où W représente l'énergie totale, donc aussi l'énergie superficielle de la masse, égale ici à $-f'S$, on aurait pu, en l'explicitant, écrire immédiatement la formule (72) déduite de (84) (Chap. IV), puis en tirer (74).

136. Séparation des cas où une seule des deux actions est sensible, tension superficielle ou gravitation. — Si la vitesse de rotation est faible, les figures d'équilibre sont des ellipsoïdes de révolution dans les deux cas. Leur aplatissement est déterminé par la formule (18) (n° 113) dans le cas de la tension superficielle, et égal à $\frac{5}{4}\varphi$, dans le cas de l'attraction, φ étant le rapport entre la force centrifuge et l'attraction. On a

$$(75) \qquad e = \frac{3M}{32\pi f'}\omega^2, \qquad e = \frac{5}{4}\varphi = \frac{5}{4}\frac{r^3}{fM}\omega^2 = \frac{15}{16}\frac{\omega^2}{\pi f\rho}.$$

Dans le cas de la gravitation, l'aplatissement ne dépend pas de la masse, comme dans le premier cas, mais seulement de la densité ρ. Une goutte d'eau tournant avec la vitesse de la Terre aura un aplatissement inverse des densités, ou 5,5 fois plus grand.

La déformation sera la même pour la même vitesse de rotation, dans les deux cas, quand les coefficients sont égaux :

$$(76) \qquad \frac{3M}{32\pi f'} = \frac{15}{16}\frac{1}{\pi f\rho}, \qquad M = 10\frac{f'}{f\rho}, \qquad r^3 = \frac{15}{2}\frac{f'}{\pi f\rho^2},$$

où r est le rayon de la masse sensiblement sphérique. Dans l'expérience de Plateau on avait $f' = 55$, prenons $\rho = 1$, on obtient $r = 12^m,5$. L'action de la gravitation et de la tension superficielle serait égale pour une sphère d'huile de $12^m,5$ de rayon.

Pour un rayon 10 fois plus grand, soit 125^m, la masse serait 1000 fois plus grande. L'aplatissement dû à la force centrifuge, limitée par la tension superficielle seule, serait 1000 fois plus grande, d'après (75), où e est proportionnel à M. Cet aplatissement reste au contraire le même dans le cas de l'attraction. L'attraction réduira donc à 0,001 la déformation, qui serait due à la tension superficielle. Cette dernière est donc complètement négligeable, dans ce cas, et pour des masses plus grandes.

Pour un rayon 10 fois moindre, $1^m,25$, c'est au contraire la tension superficielle, qui réduit à un millième de sa valeur l'aplatissement, alors que l'attraction ne le modifierait pas. Ici et pour des masses plus faibles, c'est donc l'attraction qui est négligeable.

Dans le cas des expériences de Plateau, masse d'huile de 3^{cm} de rayon, valeur 750 fois plus petite que $12^m,5$, il faut que ω^2 soit 750^3 fois plus grand, ou ω environ 1800 fois plus grand que la vitesse de rotation de la Terre, c'est-à-dire 1 tour 1/4 par minute, pour que l'aplatissement soit le même que celui de la Terre.

137. L'expérience de Plateau et l'hypothèse de Laplace. La formation des planètes. — On a voulu voir dans l'expérience de Plateau la confirmation expérimentale de l'hypothèse de Laplace, expliquant la formation des planètes, par l'atmosphère du Soleil, autrefois très dilatée, et qui se serait fractionnée en anneaux successifs. Chacun d'eux, en se concentrant en une seule masse, aurait donné naissance à une planète.

D'après les calculs du numéro précédent il ne peut y avoir aucun rapport entre l'expérience et l'hypothèse, car dans l'hypothèse cosmogonique c'est la gravitation seule qui contre-balance la force centrifuge. Dans l'expérience de Plateau au contraire c'est la tension superficielle seule.

De plus, dans l'expérience de Plateau, c'est par dilatation de la masse que se produit le fractionnement, dans l'hypothèse de Laplace au contraire c'est par concentration de la masse. Cette

concentration accroît la vitesse de rotation ω, le moment de rotation $I\omega$ restant constant.

D'ailleurs on a démontré, après Laplace, que le moment de rotation de l'atmosphère du Soleil dilatée serait à peine suffisant pour fournir le moment de rotation nécessaire aux planètes (H. Poincaré, *Hypothèses cosmogoniques*).

De plus, nous avons vu que le fractionnement d'une masse homogène, sous l'action de la force centrifuge, n'était rien moins que prouvé. C'est bien plutôt l'impossibilité de ce fractionnement qui paraît démontrée, car jamais la force centrifuge n'est supérieure à l'attraction (n° 23 *bis*, p. 79 et 85) et la figure piriforme reste partout connexe (n° 82, p. 197). On verra dans le second fascicule de ce traité, qu'il en est de même pour une *masse hétérogène* en rotation.

D'ailleurs dans l'expérience de Plateau la rotation est imprimée à la masse de l'extérieur. Laplace et tous les auteurs de cosmogonie après lui ont considéré la rotation du système comme donnée. On n'était pas plus avancé que du temps d'Aristote, qui démontrait que les mouvements des astres étant circulaires devaient être éternels, sans commencement ni fin, tout comme leur trajectoire fermée.

Ce qu'il importe avant tout d'expliquer c'est le mouvement de rotation du système solaire et de ses éléments. Or dans un système concentré et isolé, comme l'est actuellement notre système solaire, le moment de rotation reste constant. Cette rotation n'a pas pu naître dans l'état actuel. C'est une impossibilité mécanique.

Il faut donc nécessairement remonter au moment où les éléments qui ont formé le système solaire ne formaient pas un système isolé, n'étaient pas séparés du reste et des autres systèmes d'étoiles. Il faut expliquer l'acquisition des moments de rotation, par l'action des perturbations des astres voisins. M. A. Véronnet, qui a fait le calcul, a montré que l'on obtenait facilement ainsi le moment de rotation nécessaire et suffisant pour expliquer notre système planétaire (*Comptes rendus*, t. 188, 1929, p. 550, et *Constitution et évolution de l'Univers*, Chap. XI, chez Doin).

Le calcul montre en plus que pour les neuf dixièmes de la masse primitive, le moment de rotation aurait été plus considérable encore. Ces éléments plus éloignés auraient donc formé d'autres

systèmes de planètes ou de comètes, qui pourraient avoir des inclinaisons très différentes sur l'écliptique et des orbites très allongées, n'ayant pas été régularisées par la résistance du milieu. La découverte de la nouvelle planète Pluton, qui remplit précisément ces conditions est venue confirmer d'une façon remarquable ces calculs théoriques.

La gravitation seule suffit ainsi pour expliquer la forme, l'équilibre, tous les mouvements de translation et de rotation des astres et faire sortir ces astres eux-mêmes de la nébuleuse primitive en organisant le chaos de ses éléments.

L'Astronomie est actuellement en mesure, au moyen des seules forces connues et des seules lois connues, d'expliquer la formation, l'évolution et l'état actuel des astres et des systèmes d'astres, tout comme la Géologie et la Paléontologie ont expliqué la formation de la croûte terrestre, son évolution, celle des plantes et des animaux, par la seule action des *causes actuelles* connues.

La Physique a démontré que toute la matière, que tous les atomes étaient composés de corpuscules électriques, gravitant les uns autour des autres, les électrons et les protons. Le problème de la formation de la matière et des atomes se trouve ainsi posé dans les mêmes conditions que celui des astres. La proportion du plomb et des produits de désintégration, dans les minerais radioactifs, permet même de faire remonter l'âge de l'uranium à plusieurs milliards d'années, au moins en première approximation. La gravitation n'est apparue qu'après la formation des atomes, par conséquent la période astronomique de formation a été précédée d'une autre évolution, dont nous ne savons encore à peu près rien.

INDEX BIBLIOGRAPHIQUE.

Ouvrages.

THOMSON et TAIT. — *Treatise on Natural Philosophy*. New Edition. Cambridge University Press, 1883.

TISSERAND. — *Traité de Mécanique céleste*, t. II. Paris, Gauthier-Villars.

POINCARÉ. — *Figures d'équilibre d'une masse fluide*. Paris, Gauthier-Villars.

APPELL. — *Traité de Mécanique rationnelle*, t. III. Paris, Gauthier-Villars.

VÉRONNET. — *Figures d'équilibre et Cosmogonie* (*Mémorial des Sciences mathématiques*). Paris, Gauthier-Villars.

Mémoires.

DIRICHLET. — Untersuchungen über ein Problem der Hydrodynamik (*Journal de Crelle*, vol. 58, 1861, p. 209).

DEDEKIND. — Zusatz zu der vorstehenden Abhandlung (*Ibid.*).

RIEMANN. — Ein Betrag zu den Untersuchungen über die Bewegungen eines gleichartigen flüssigen Ellipsoids (*Abhand. der Konigl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen*, vol. IX, 1861).

— Ueber das Potential eines Ringes (*Gesammelte Werke*, p. 407).

MATTHIESSEN. — *Zeitschrift Math. und Physik*, t. X, 1865; t. XVI, 1871; t. XVIII, 1873. — *Ann. Math. pura et appl.*, 2e série, t. III, 1869-1870.

— *Ueber die Gleichgewichtsfiguren homogener frei rotirende Flüssigkeinten*, Kiel, 1857; *Neue Untersuchungen*, Kiel, 1859.

LIAPOUNOFF. — Sur la stabilité des figures ellipsoïdales d'équilibre d'un liquide animé d'un mouvement de rotation (publié en russe en 1884, traduit en français par Davaux en 1904 (*Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, 2e série, t. VI).

— Recherches sur la théorie des corps célestes (*Mémoires de l'Académie des Sciences de Saint-Pétersbourg*, 8e série, vol. XIV, n° 7, 1903).

— Sur un problème de Tchebichef (*Mémoires de l'Académie des Sciences de Saint-Pétersbourg*, 8e série, vol. XVII, n° 3, 1906).

— Problème de minimum dans une question de stabilité des figures d'équilibre d'une masse fluide en rotation (*Mémoires de l'Académie des Sciences de Saint-Pétersbourg*, 8e série, t. XXII, n° 5, 1908).

— Sur une classe de figures d'équilibre d'un liquide en rotation (*Annales de l'École Normale*, 3e série, t. XXVI, 1909).

— Sur les figures d'équilibre peu différentes des ellipsoïdes d'une masse liquide homogène douée d'un mouvement de rotation (Pétrograd, édité par l'Académie des Sciences) :

Première Partie : Etude générale du problème, 1906.
Deuxième Partie : Figures dérivées des ellipsoïdes de Maclaurin, 1909.
Troisième Partie : Figures dérivées des ellipsoïdes de Jacobi, 1912.
Quatrième Partie : Nouvelles formules pour la recherche des figures d'équilibre, 1914.

— Sur les questions qui appartiennent aux surfaces des figures d'équilibre dérivées des ellipsoïdes (*Bulletin de l'Académie des Sciences de Pétrograd*, 1916).

Kowalewski (Mme). — Zusätze und Bemerkungen zu Laplace's Untersuchung über die Gestalt der Saturneringe (*Astronomische Nachrichten*, t. CXI, 1885, n° 2643). Ce Mémoire a été communiqué à l'Université de Göttingen en 1874.

H. Poincaré. — Sur l'équilibre d'une masse fluide animée d'un mouvement de rotation (*Comptes rendus*, février, mars, juillet 1885).

— Sur la stabilité de l'anneau de Saturne (*Bulletin astronomique*, t. II, mars, septembre, novembre 1885).

— Sur l'équilibre d'une masse fluide animée d'un mouvement de rotation (*Acta mathematica*, t. VII, 1885).

— Sur l'équilibre d'une masse fluide en rotation (Réponse à M. Matthiessen) (*Comptes rendus*, avril 1886).

— Sur un théorème de M. Liapounoff relatif à l'équilibre d'une masse fluide (*Comptes rendus*, mars 1887).

— Sur l'équilibre d'une masse hétérogène en rotation (*Comptes rendus*, juin 1888).

— Sur la stabilité de l'équilibre des figures piriformes (vol. 198, série A, 1902, des *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*).

— Les formes d'équilibre d'une masse fluide en rotation (*Revue générale des Sciences*, décembre 1892).

Basset. — On the Motion of a liquid Ellipsoïd under the Influence of its own Attraction (*Proceedings of the London Math. Soc.*, vol. XVII, 1887).

— *American Journal math.*, t. XI, 1889.

Darwin (G. H.). — On Jacobi's figure of equilibrium for a rotating Mass of liquid (*Proc. Roy. Soc.*, t. XVI, 1887).

— On figure of equilibrium... (*Phil. trans.*, 1887).

— Ellipsoïdal Harmonic Analysis (*Phil. Trans.*, série A, vol. 197, 1901).

— The pear-shaped Figure of equilibrium of a rotating Mass of liquid *Phil. Trans.*, London, série A, vol. 198, 1902).

— The stability of the pear-shaped Figure of equilibrium of a rotating Mass of liquid (*Phil. Trans.*, série A, vol. 200, 1903).

— On the integrals of the square of Ellipsoïdal water harmonic function (*Phil. Trans.*, série A, vol. 203, 1903).

— On the figure and stability of a liquid satellite (*Phil. Trans.*, série A, vol. 206, 1906).

— Further consideration of the stability of the pear-shaped Figure (*Phil. Trans.*, série A, vol. 208, 1908).

— The approximate determination of the form of Maclaurin's spheroid (*Trans. Amer. Math. Soc.*, t. IV, 1903, et t. IX, 1908).

— Adresse prononcée par le Président, en remettant à M. Poincaré la Médaille d'or de la Société Royale astronomique de Londres, 9 février 1909 (*Monthly Notices*).

L. Bénès. — Ueber das Vorzeichen des Poincaréschen Ausdrückes für die Stabilität der birnenförmigen Figur einer rotierenden Flussigkeitmasse (*Astr. Nachr.*, t. 186, n° 4459, 1910).

Love. — On the Motion of a liquid elliptic Cylinder under its own Attraction.

— The Oscillations of mass of gravitating liquid in the form of an elliptic Cylinder when rotates as if rigid about its axis (*Quarterly Journal of Mathematics*, vol. XXIII, 1889).

— The free and forced Vibrations of an elastic spherical shell containing a given Mass of liquid (*Proceedings of the London Math. Soc.*, vol. XIX, 1889).

Schwarzschild. — Die Poincarésche Theorie des Gleichgewitchts (*Annalen der K. Sternwarte München*, Band III, 1889).

HAMY. — Etude sur la figure des corps célestes (*Annales de l'Observatoire de Paris*, t. XIX) (Thèse).

— Remarques sur la théorie générale de la figure des planètes (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 4e série, t. VI, 1890).

DUHEM. — Sur la stabilité de l'équilibre d'une masse fluide dont les éléments sont soumis à leurs actions mutuelles (*Journal de Mathématiques*, 5e série, t. III, 1897).

— Sur la stabilité de l'équilibre d'une masse fluide animée d'un mouvement de rotation (*Journal de Mathématiques*, 5e série, t. VII, 1901, p. 311, et t. IX, 1902, p. 233).

VILLIE. — Équilibre relalif d'une masse fluide (*Journal de Mathématiques*, 1878, p. 325).

MATHY. — L'ellipsoïde considéré comme figure d'équilibre relatif d'une masse fluide homogène (*Journal de Mathématiques*, 1898, p. 231).

J. H. JEANS. — The stability of a spherical nebula (*Phil. Trans.*, série A, vol. 199, 1902).

— On the equilibrium of rotating liquid Cylinders (*Phil. Trans.*, série A, vol. 200, 1903).

— On the vibration, and stability of gravitating planet (*Ibid.*, vol. 201, 1903).

— The Motion of tidally distorded masses (*Memoirs of the Roy. Astr. Soc.*, vol. LXII, Part I, 1917).

— Figure of rotating masses (*The Observatory*, 1916, séances des 14 avril et 10 novembre de la Roy. Astr. Soc.).

— Evolution of rotating masses (*The Observatory*, 1917, p. 196).

— Problems of cosmogony and stellar dynamics (Cambridge University Press, 1919).

VOLTERRA. — Sur la stratification d'une masse fluide en équilibre (*Acta mathematica*, t. XXVII, 1903, p. 105).

STEKLOFF. — Sur le problème du mouvement d'un ellipsoïde fluide homogène dont toutes les parties s'attirent suivant la loi de Newton (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. 141, 15 décembre 1905).

— Sur le mouvement non stationnaire d'un ellipsoïde fluide de révolution qui ne change pas sa figure pendant le mouvement (*Comptes rendus*, t. 141, 11 décembre 1905).

— Même titre (*Comptes rendus*, t. 142, 8 janvier 1906).

— Problème du mouvement d'une masse fluide incompressible de forme ellipsoïdale (*Annales de l'École Normale*, t. XXVI, 1909, p. 225-235).

VILERTI. — *Atti Ist. Veneto*, 8e série, t. VII, 1909-1910, et t. XIII, 1910-1911).

CRUDELI. — *Rendiconti, Academia dei Lincei*, 1910.

PADOVA. — *Sul moto di un ellissoide fluido e omogeneo* (Tesi presentata alla Scuola Normale super. di Pisa, 1869, p. 26-27).

TELSONE (O.). — *Il moto di un ellissoide fluido secondo l'ipotesi di Dirichlet* (Pisa, 1894).

LEVI-CIVITA. — *Atti Ist. Veneto*, 8e série, t. XI, 1908-1909, et *Rendiconti del Circolo di Palermo*, t. XXXIII, 1912.

APPELL. — Équation fonctionnelle pour l'équilibre relatif d'un liquide homogène en rotation sous l'attraction newtonienne de ses parties (*Congrès des Sociétés savantes*, 1910; *Rendiconti del Circolo di Palermo*, t. XXX. p. 82; *Comptes rendus*, t. 156, 24 février 1913, p. 587).

— Figures d'équilibre relatif d'un liquide homogène en rotation (*Annuaire du Bureau des Longitudes*, 1919).

COLLET. — Sur les solutions approchées de certaines équations intégrales non linéaires (*Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, t. IV, 1912). (Application de l'équation fonctionnelle de M. Appell.)

HUMBERT (P.). — Sur la figure piriforme d'une masse fluide (*Comptes rendus*, t. 160, 19 avril 1915, p. 509).

— Sur une figure d'équilibre des fluides en rotation (*Ibid.*, 3 mai 1915, p. 595).

— Sur les bifurcations des ellipsoïdes de Jacobi (*Ibid.*, t. 161, 20 septembre 1915, p. 341).

— Simplification d'une formule de Liapounoff (*Ibid.*, t. 162, 3 janvier 1916, p. 41).

— Sur les surfaces de Poincaré (*Thèse*, Paris, 1918).

— Sur les surfaces de Poincaré d'ordre 6 (*Comptes rendus*, t. 167, 25 novembre 1918, p. 776).

— Figures cylindriques d'équilibre d'une masse fluide (*Bull. astr.*, 1918, p. 310).

— Sur le calcul approché des éléments des Jacobiens critiques d'ordre élevé (*Comptes rendus*, t. 169, 1919, p. 902).

— Éléments dynamiques des quatre premiers Jacobiens critiques (*Bull. astr.*, t. XXXV, 1918).

— Les calculs de G. H. Darwin sur la stabilité de la figure piriforme (*Comptes rendus*, t. 170, 1920, p. 38).

GLOBA-MIKHAÏLENKO. — Figures d'équilibre d'une masse fluide en rotation, infiniment voisine d'un cylindre elliptique (*Comptes rendus*, t. 159, 9 novembre 1914, p. 646).

— Figures ellipsoïdales d'équilibre d'une masse fluide en rotation quand on tient compte de la pression capillaire (*Comptes rendus*, t. 160, 15 février 1915, p. 233).

— Modification des figures d'équilibre d'une masse fluide en rotation sous l'action de la pression capillaire (*Comptes rendus*, t. 160, 19 avril 1915, p. 510).

— Sur quelques nouvelles figures d'équilibre d'une masse fluide en rotation (Thèse) (*Journal de Mathématiques*, 7e série, vol. II, fasc. 1).

— Sur une nouvelle figure d'équilibre d'une masse fluide en rotation (*Nouvelles Annales de Mathématiques*, 4e série, t. XVI, décembre 1916).

— Contribution à l'étude des mouvements d'une masse fluide en rotation (Thèse de Doctorat d'État) (*Journal de Mathématiques*, 1920).

GREENHILL (A. G.). — On the rotation of a liquid ellipsoïd about its mean axis (*Proceedings of the Cambridge philosophical Society*, t. III, 1880, p. 233-246).

— On the general motion of a liquid ellipsoïd under the gravitation of its own parts (*Proc. of the Cambridge phil. Soc.*, t. IV, 1880, p. 4-14).

— On the rotation of a liquid ellipsoïd about an axis not a principal axis (*Proc. Cambridge*, t. IV, 1882, p. 208-222).

ROSENBLATT (H.). — Sur un théorème de Liapounoff (*Bulletin des Sciences mathématiques*, 1920).

VÉRONNET (A.). — Rotation de l'ellipsoïde hétérogène et figure exacte de la Terre. Thèse (*Journal de Mathématiques*, 1912, p. 314).

— Variation du grand axe dans les figures ellipsoïdales d'équilibre (*Comptes rendus*, t. 169, 1919, p. 320; *Journal de Mathématiques*, 1919).

— Sur le calcul numérique des figures d'équilibre voisines des ellipsoïdes (*Journal de Mathématiques*, 1920).

— Figures d'équilibre d'un liquide en rotation. Ordre de succession des figures critiques de bifurcation (*Comptes rendus*, t. 170, 1920, p. 1303).

— Évolution des figures d'équilibre. Impossibilité d'un dédoublement (*Comptes rendus*, t. 185, 1927, 1927, p. 1441).

— Constitution et évolution de l'univers, 1927, chez Doin, Paris.

PLUMMER (H. C.). — On the ellipticities of the Maclaurin ellipsoids (*Monthly Notices*, t. 80, n° 1, n v. 1919, p. 26-33).

KAIBARA (R.). — On the jacobian ellipsoïd (*Tokyo, Sugatu-Baturigak kwai, Kizi*, série 2, t. IV, 1907).

KRÜGER (S.). — Ellipsoïdale Evenwichts Vormen (*Niew Archief voor Wiskunde*, série 2, 1896).

E. CARTAN. — Sur la stabilité ordinaire des ellipsoïdes de Maclaurin (*Bulletin des Sciences mathématiques*, t. 46, 1922, p. 332-342).

— Sur la stabilité ordinaire des ellipsoïdes de Jacobi.

M. ORLOW. — Nouveaux calculs pour les figures d'équilibre relatif d'un liquide homogène (*Académie des Sciences de l'Ukraine*, t. 9, 1928, p. 65-117.

— Sur le calcul des ellipsoïdes critiques de révolution dans la série des figures liquides d'équilibre relatif (*Académie des Sciences de l'Ukraine*, 1927).

— Bemerkung zur Berechnung der Elemente der critischen dreiaxen Ellipsoide (*Ac. Sc. Ukraine*, 1923). Un Mémoire et deux Notes en russe.

A. CHARRUEAU. — Etude d'une masse liquide de révolution homogène, sans pesanteur et à tension superficielle, animée d'une rotation uniforme (*Annales de l'École Normale supérieure*, 1927, p. 129-176).

— Sur les figures d'équilibre relatif d'une masse liquide en rotation (*Thèse*, 1928).

— Sur quelques propriétés géométriques des surfaces d'équilibre relatif d'une masse liquide de révolution (*Comptes rendus*, t. 182, 1926, p. 1601).

— Sur une figure d'équilibre d'une masse liquide en rotation (*Comptes rendus*, t. 184, 1927, p. 961).

— Sur les figures d'équilibre relatif d'une masse liquide en rotation à tension superficielle (*Comptes rendus*, t. 184, p. 1418).

TABLE DES MATIÈRES.

Pages.

PREFACE DU TOME IV V

PRÉFACE DE LA SECONDE ÉDITION VII

CHAPITRE I. — *Problème. Indications historiques.*

1. Le problème 1
2. Indications historiques 2
3. Autres recherches 10

CHAPITRE II. — *Attraction et potentiel.*

4. Formule de Green 12
5. Attraction et potentiel 15
6. Étude du potentiel 16
7. Théorème de Gauss 17
8. Formule de Poincaré 21
9. Forme des surfaces équipotentielles. Ellipsoïde homogène. Ellipsoïde de révolution 23
10. Potentiel de quelques corps attirants 24
11. Énergie potentielle d'un système de corps attirants 29
12. Solides maximum 33
13. Attraction des surfaces 37

CHAPITRE III. — *Ellipsoïdes de Maclaurin et de Jacobi.*

14. Masse sans mouvement de rotation 40
15. Masse homogène en mouvement et conservant une forme invariable 42
16. Conditions d'équilibre relatif 43
17. Conditions de stabilité. Théorème de Poincaré 45
18. Ellipsoïdes de Maclaurin 47
19. Discussion 50
20. Ellipsoïdes de Jacobi 54
21. Discussion en prenant la vitesse de rotation comme paramètre 56
22. Tableau des résultats et graphiques 66
23. Discussion en prenant le moment de rotation comme paramètre 70

23 *bis*. Discussion en prenant le grand axe comme paramètre 76

CHAPITRE IV. — *Fonctions diverses. Calculs et résultats préliminaires.*

24. Choix d'unités de Poincaré 86
25. Équations fonctionnelles 87

Pages.
26. Équations intégro-différentielles..... 89
27. Formules différentielles et travail virtuel..... 92
28. Calcul de quelques variations..... 94
29. Relations entre l'énergie, le moment de rotation, etc..... 95
30. Possibilité de figures annulaires d'équilibre..... 97

CHAPITRE V. — *Fonctions sphériques.*

31. Expression de ΔV dans un changement de variables..... 99
32. Définition des fonctions sphériques..... 101
33. Formation des fonctions sphériques..... 103
34. Étude du polynome de Legendre..... 105
35. Détermination de la valeur des X_n^p..... 106
36. Fonctions zonales, sectoriales, tesserales..... 109
37. Recherche des solutions $f(\theta)g(\varphi)$..... 110
38. Propriétés intégrales des fonctions sphériques..... 112
39. Développement d'une fonction de deux variables en une série de polynomes de Laplace..... 114
40. Problème de Dirichlet sur la sphère..... 115
41. Potentiel d'une simple couche sphérique..... 116

CHAPITRE VI. — *Fonctions de Lamé.*

42. Historique..... 119
43. Introduction des coordonnées elliptiques..... 119
44. Expression en ρ, μ, ν d'un polynome en x, y, z..... 121
45. Problème inverse..... 123
46. Élément linéaire et équation de Laplace en coordonnées elliptiques... 125
47. Rappel de quelques notions sur les fonctions elliptiques..... 127
48. Notations symétriques de Weierstrass..... 130
49. Fonctions de Lamé et produits de Lamé..... 131
50. Recherche de solutions particulières. Degré pair. Degré impair..... 133
51. Les équations caractéristiques en h ont toutes leurs racines réelles... 138
52. Formation effective des fonctions de Lamé pour $n = 1$ et $n = 2$..... 139
53. Analogie des fonctions de Lamé et des fonctions sphériques..... 143
54. Développement d'une fonction $\Phi(\mu, \nu)$ sur l'ellipsoïde en une somme de produits de Lamé..... 145
55. Cas de dégénérescence. Ellipsoïde allongé..... 146
56. Détermination des fonctions de Lamé dans le cas de dégénérescence.. 149
57. Les racines des équations caractéristiques sont toutes réelles..... 152
58. Formule fondamentale. Définition de l..... 154
59. Calcul des coefficients du développement en série de produits de Lamé. 156
60. Cas particulier du polynome symétrique..... 157
61. Théorème sur les racines du polynome $f(\rho^2)$..... 158
62. Fonction de Lamé de seconde espèce..... 160
63. Propriétés de la fonction S..... 161

CHAPITRE VII. — *Figures d'équilibre voisines des ellipsoïdes.*

64. Problème de Dirichlet sur l'ellipsoïde..... 162
65. Potentiel d'une couche infiniment mince..... 163

Pages.
66. Application. Potentiel d'une couche homothétique 164
67. Notation des fonctions usuelles de Lamé 166
68. Méthode de Poincaré 168
69. Potentiel de l'ellipsoïde 168
70. Équations des figures ellipsoïdales d'équilibre au moyen des fonctions de Lamé 170
71. Résolution des équations d'équilibre 172
72. Pesanteur à la surface 173
73. Expression de la déformation de l'ellipsoïde d'équilibre 174
74. Détermination des coefficients qui définissent la déformation 175
75. Signification des deux premiers coefficients 177
76. Discussion générale des équations de condition 179
77. Ellipsoïdes de Maclaurin 181
78. Ellipsoïdes de Maclaurin donnant d'autres ellipsoïdes 184
79. Interprétation de ces solutions 187
80. Détermination du premier ellipsoïde de bifurcation 188
81. Ellipsoïdes de Jacobi de bifurcation 193
82. Étude des figures voisines des Jacobi 196
83. Calculs des éléments des ellipsoïdes critiques à trois axes 202
84. Détermination de la forme des figures dérivées 220

CHAPITRE VIII. — *Étude de la stabilité des figures d'équilibre.*

85. Cas des systèmes conservatifs 234
86. Petits mouvements autour d'une position d'équilibre 235
87. Cas des systèmes dissipatifs 237
88. Équations des petits mouvements dans le cas d'un système dissipatif. 239
89. Dissipativité complète et dissipativité incomplète 240
90. Stabilité de l'équilibre dans le cas de forces dissipatives. Théorème de Tait et Thomson 243
91. Forces motionnelles gyroscopiques 247
92. Théorème de Tait et Thomson sur l'équilibre des forces gyroscopiques. 249
93. Stabilité temporaire et stabilité séculaire 253
94. Application des théorèmes à l'équilibre d'une masse fluide en rotation. 255
95. Mouvement général d'une masse fluide qui se meut et se déforme. Solide équivalent 257
96. Théorème de Poincaré sur la condition de stabilité 260
97. Représentation graphique des courbes d'équilibre. Système à un paramètre 264
98. Cas particuliers. Points limites et points doubles 268
99. Application au mouvement d'un point sur un cercle tournant 272
100. Système à n variables dépendant d'un paramètre 274
101. Réduction au cas d'une variable à un paramètre 277
102. Application à la détermination des courbes de stabilité 280
103. Application à la stabilité des figures d'équilibre d'une masse fluide... 281
104. Instabilité de la figure piriforme 284
105. Représentation graphique générale de la stabilité des figures d'équilibre. 288
106. Stabilité ordinaire ou temporaire des figures d'équilibre 291
107. Figures annulaires. L'anneau de Saturne. Masses indéfinies. Le cylindre elliptique 292

CHAPITRE IX. — *Figures d'équilibre d'une masse homogène en rotation et soumise à la tension superficielle.*

Pages.
108. Historique de la question 295
109. Équation de l'équilibre de la surface libre 296
110. Équation différentielle du méridien 297
111. Forme générale de la courbe méridienne 298
112. S'il n'y a pas de pression extérieure, la figure reste convexe 300
113. Cas d'une faible vitesse de rotation. Ellipsoïde de révolution 301
114. Intégration complète de l'équation différentielle par les fonctions ellliptiques 301
115. Pour la même valeur du paramètre unique h, toutes les figures d'équilibre sont semblables 303
116. Étude de la variation du rayon polaire 304
117. Étude de la variation de la vitesse de rotation. Maximum de cette vitesse 305
118. Variation du rayon équatorial 307
119. Expressions du moment d'inertie et de l'énergie 307
120. Condition d'équilibre déduite du principe des travaux virtuels 308
121. Stabilité de l'équilibre 309
122. Cas des figures annulaires 310
123. Les formules des figures annulaires sont générales et comprennent les figures non annulaires comme cas particuliers 311
124. A chaque valeur du rapport des deux rayons de l'anneau correspondent des figures d'équilibre, qui sont toutes semblables entre elles 312
125. Détermination du rayon intérieur de l'anneau et de sa variation 314
126. Détermination du rayon extérieur de l'anneau et de sa variation 316
127. Variation de la vitesse de rotation 318
128. Tableau des valeurs. Résumé de la discussion. Courbes des variations et des sections méridiennes 318
129. Étude du cas où le rayon est très grand. L'anneau est un tore 320
130. Cas où la section de l'anneau est elliptique 322
131. Expressions du moment d'inertie et de l'énergie 322
132. Stabilité de l'équilibre 323
133. L'expérience de Plateau et les résultats mathématiques 324
134. Cas d'une masse soumise à la fois à la gravitation et à la tension superficielle 326
135. Relation de Poincaré étendue à ce cas général 326
136. Séparation des cas où une seule des deux actions est sensible : tension superficielle ou gravitation 327
137. L'expérience de Plateau et l'hypothèse de Laplace. La formation des planètes 328

INDEX BIBLIOGRAPHIQUE 331

TABLE DES MATIÈRES 339

GAUTHIER-VILLARS & Cie
Imprimeurs-Éditeurs
55, Quai des Grands-Augustins, PARIS (6e)
R.C. Seine 22520

Envoi dans toute la France et l'Union postale contre mandat-poste ou valeur sur Paris
Frais de port en sus (Chèques postaux : Paris 29.323).

H. BEGHIN
Maître de Conférences à la Faculté des Sciences de Paris

ET

Gaston JULIA
Professeur à la Faculté des Sciences de Paris

Exercices de Mécanique

Tome I, Fascicule I. Un volume in-8 raisin (25-16) de 144 pages ..... 80 fr.
Tome I, Fascicule II. Un vol. in-8 raisin (25-16) de 240 pages, avec 86 fig... 60 fr.

Gaston JULIA
Professeur à la Faculté des Sciences de Paris

Cours de Cinématique

RÉDIGÉ PAR
Jean DIEUDONNÉ
Élève de l'École Normale supérieure

(*Cours de la Faculté des Sciences de Paris*)

Un volume in-8 carré (23-14) de 150 pages, avec 52 figures ..... 25 fr.

GAUTHIER-VILLARS & Cie
Imprimeurs-Éditeurs
55, Quai des Grands-Augustins, PARIS (6e)
R. C. Seine 22520

Envoi dans toute la France et l'Union Postale, contre chèque ou valeur sur Paris.
Frais de port en sus. (Chèques-postaux : Paris 29.323).

Léon LECORNU
Membre de l'Institut
Inspecteur général des Mines

Cours de Mécanique

PROFESSÉ A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE

3 volumes in-8 (25-16) se vendant séparément :

Tome I : Volume de VII-536 pages, avec 281 figures ..... 50 fr.
Tome II : Volume de VI-538 pages, avec 110 figures ..... 50 fr.
Tome III : Volume de VI-670 pages, avec 211 figures ..... 56 fr.

GAUTHIER-VILLARS & Cie
Imprimeurs-Éditeurs
55, Quai des Grands-Augustins, PARIS (6e)
R. C. Seine 22520

Envoi dans toute la France et l'Union Postale, contre chèque ou valeur sur Paris.
Frais de port en sus. (Chèques-postaux : Paris 29.323).

P. PAINLEVÉ

Cours de Mécanique

PROFESSÉ A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE

TOME I

Un volume in-8 raisin (25-16) de 664 pages, avec 169 figures..... 100 fr.

P. PAINLEVÉ
ET
Ch. PLATRIER

Cours de Mécanique

PROFESSÉ A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Un volume in-4 carré (28-13) de VIII-644 pages..... 150 fr.

Tous les Travaux de Typographie

scientifique et commerciale

CATALOGUES INDUSTRIELS

ÉDITIONS D'ART

Gauthier-Villars et Cie

55, Quai des Grands-Augustins — PARIS (6e)

Tél. : Danton 05-11 et 05-12 R. C. Seine 22520

IMPRIMEURS-ÉDITEURS

DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES
DU BUREAU DES LONGITUDES
DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE
DE L'OBSERVATOIRE DE PARIS

Tous les Travaux de Photogravure

trait, simili, couleur

REPRODUCTION D'OUVRAGES ANCIENS

PAR PROCÉDÉ SPÉCIAL

PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS ET Cie.
91212 Quai des Grands-Augustins, 55.

LIBRAIRIE GAUTHIER-VILLARS
QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS, 55, PARIS (6e)

Envoi dans toute la France et l'Union postale contre mandat-poste ou valeur sur Paris. Frais de port en sus (Chèques postaux : Paris 29 323). R. C. Seine 99 506.

ADHÉMAR (Robert d'), Ingénieur des Arts et Manufactures, Docteur ès sciences, Professeur à l'Institut industriel du Nord de la France. — **Statique cinématique. Éléments de Mécanique à l'usage des Ingénieurs.** Un volume in-8 raisin, de XI-254 pages, avec 153 figures..... **75 fr.**

BRICARD (Raoul), Ingénieur des Manufactures de l'État, Professeur au Conservatoire National des Arts et Métiers et à l'École Centrale des Arts et Manufactures. — **Leçons de Cinématique :**

TOME I : *Cinématique théorique.* In-8 de 336 pages, avec 117 figures..... **250 fr.**

TOME II : *Cinématique appliquée.* In-8 de VI-352 pages, avec 183 figures..... **250 fr.**

JOUGUET (E.), Inspecteur général des Mines, Professeur à l'École Nationale des Mines, Répétiteur de Mécanique à l'École Polytechnique. — **Lectures de Mécanique. La Mécanique enseignée par les auteurs originaux.** Deux volumes in-8 (25-16). Nouveau tirage, avec 14 notes et additions :

PREMIÈRE PARTIE : *La naissance de la Mécanique.* Un volume de X-238 pages, avec 85 figures. Nouveau tirage, avec 7 notes et additions..... (*Épuisé.*)

DEUXIÈME PARTIE : *L'organisation de la Mécanique.* Un volume de 330 pages, avec 31 figures. Nouveau tirage, avec 7 notes et additions..... **100 fr.**

LAMOTTE (Marcel), Professeur de Physique à la Faculté des Sciences, chargé de Cours à l'Institut Électrotechnique de Toulouse. — **Cours de Mécanique appliquée.** Un volume in-8 (25-16) de 282 pages, avec 214 figures..... **125 fr.**

LÉVY (Paul), Ingénieur en chef des Mines, Professeur à l'École Polytechnique. — **Cours de Mécanique,** *professé à l'École Supérieure des Mines.* Un volume in-8 (25-16) de 303 pages, avec 77 figures..... **200 fr.**

MONTESSUS DE BALLORE (R. de), Professeur à la Faculté libre des Sciences de Lille. — **Exercices et Leçons de Mécanique analytique.** *Centre de gravité. Attraction. Potentiel. Moment d'inertie. Dynamique des corps solides et des systèmes. Les fonctions elliptiques dans le domaine réel.* In-8 (23-14) de VI-334 pages, avec 72 figures..... **120 fr.**

SAINT-GERMAIN (de), Doyen de la Faculté des Sciences de Caen. — **Recueil d'exercices sur la Mécanique rationnelle,** à l'usage des candidats à la Licence et à l'Agrégation des Sciences mathématiques. 2e édition, revue et augmentée. In-8 (23-14) de 560 pages, avec figures; nouveau tirage..... **150 fr.**

127253-47. — Paris, Imp. Gauthier-Villars, quai des Grands-Augustins, 55.

Poids : $0^{kg},700$

PRI

AUTHIER-VILLARS • DS AUGUSTINS, PARIS 6e

0F00

PRINTED IN FRANCE

UNIVERSITY OF ILLINOIS-URBANA
3 0112 112077992